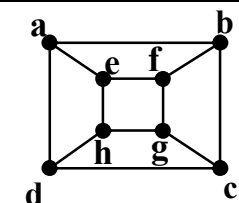


سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته	نام و نام خانوادگی :	ساعت شروع : ۸ صبح	رشته : ریاضی فیزیک
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	تعداد صفحه: ۲	تاریخ امتحان : ۱۳۹۹/۰۶/۰۴	مدت امتحان : ۱۲۰ دقیقه
دانش آموزان روزانه سراسر کشور در نوبت شهریور ماه سال ۱۳۹۹	مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir		
ردیف	سوالات پاسخ نامه دارد		
	نمره		

الف) بخش الزامی

دانش آموز عزیز به سوالات ۱ تا ۱۳ جهت کسب ۱۶ نمره پاسخ دهید.

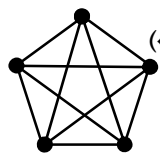
۱	درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را تعیین کنید. الف) برای هر دو عدد حقیقی x و y ، داریم: $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$. ب) اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $ab = 0$ آن گاه $a = 0$ یا $b = 0$. پ) اگر $a, b \in \mathbb{R}$ داریم: $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$. ت) حاصل جمع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.	۱
۱/۲۵	ثابت کنید اگر a و b دو عدد حقیقی نامنفی باشند، داریم: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.	۲
۱/۲۵	فرض کنیم a و n دو عدد طبیعی باشند به طوری که $a \mid 2n+3$ و $a \mid 3n+4$. نشان دهید $a=1$.	۳
۱/۵	ثابت کنید اگر $p > 3$ عددی اول باشد، آنگاه به یکی از دو صورت $p=6k+1$ یا $p=6k+5$ ($k \in \mathbb{W}$) نوشته می‌شود.	۴
۱/۲۵	اگر باقی‌مانده تقسیم اعداد m و n بر ۱۷ به ترتیب ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $(2m-5n)$ بر ۱۷ را محاسبه کنید.	۵
۱/۲۵	رقم یکان عدد $(3^{11} + 7)$ را به دست آورید.	۶
۱	معادله سیاله $2x + 5y = 19$ را حل کنید.	۷
۲/۵	گراف G به صورت مقابل رسم شده است. به سوالات زیر پاسخ دهید. الف) $\Delta(G)$ ، $\delta(G)$ را مشخص کنید. ب) سه دور به طول ۳ بنویسید. پ) ماکزیمم درجه در مکمل گراف G چند است؟ ت) $N_G(e)$ را با اعضا بنویسید. ث) آیا گراف G همبند است؟	۸
۱	گراف کامل K_p دارای ۱۰ یال است. ابتدا p را به دست آورید، سپس گراف را رسم کنید.	۹
۱/۵	عدد احاطه‌گری گراف زیر را مشخص کنید.	۱۰
		
۰/۷۵	هشت نفر به چند طریق می‌توانند در سه اتاق، سه نفره، چهار نفره و یک نفره قرار بگیرند؟	۱۱
۱/۲۵	معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 14$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آن که $x_1 \geq 1$ و $x_3 > 3$ باشند؟	۱۲
۰/۵	یک مربع لاتین چرخشی 4×4 بنویسید.	۱۳

« بقیه سوالات در صفحه دوم »

سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته	نام و نام خانوادگی :	ساعت شروع : ۸ صبح	رشته : ریاضی فیزیک
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	تعداد صفحه: ۲	تاریخ امتحان : ۱۳۹۹/۰۶/۰۴	مدت امتحان : ۱۲۰ دقیقه
دانش آموزان روزانه سراسر کشور در نوبت شهریور ماه سال ۱۳۹۹		مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir	

ردیف	سوالات پاسخ نامه دارد	نمره
------	-----------------------	------

(ب) بخش انتخابی																				
دانش آموز عزیز جهت کسب ۴ نمره از سوالات ۱۴ تا ۲۱ فقط ۴ سوال را به دلخواه انتخاب کرده و پاسخ دهید.																				
۱۴	فرض کنیم $a, b \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ اگر $a \equiv b^m$, $n \in \mathbb{N}$ ثابت کنید: $a^n \equiv b^n$.	۱																		
۱۵	آیا گراف ۷ رأسی ۳-منتظم وجود دارد؟ برای پاسخ خود دلیل ارائه کنید.	۱																		
۱۶	گراف P_6 را رسم کرده و تمام مسیرهای به طول ۳ را مشخص کنید.	۱																		
۱۷	متعامد بودن دو مربع لاتین زیر را بررسی کنید.	۱																		
	<table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr> </table> <table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> </table>	۱	۲	۳	۳	۱	۲	۲	۳	۱	۱	۲	۳	۲	۳	۱	۳	۱	۲	
۱	۲	۳																		
۳	۱	۲																		
۲	۳	۱																		
۱	۲	۳																		
۲	۳	۱																		
۳	۱	۲																		
۱۸	در یک کلاس ۲۵ نفری، ۱۵ نفر فوتبال و ۱۴ نفر والیبال بازی می کنند. مشخص کنید چند نفر نه فوتبال بازی می کنند و نه والیبال، به شرط آن که بدانیم ۹ نفر هم فوتبال و هم والیبال بازی می کنند.	۱																		
۱۹	تعداد تابع های یک به یک از یک مجموعه ۳ عضوی به یک مجموعه ۶ عضوی چند تا است؟ (با ذکر دلیل)	۱																		
۲۰	۸ نفر را که برای یک برنامه تلویزیونی پیامک ارسال کرده اند، انتخاب کرده ایم و می خواهیم در ۴ مرحله و در هر مرحله یک جایزه را به یکی از این ۸ نفر (با قرعه کشی) به دلخواه بدهیم. این عمل به چند طریق امکان پذیر است؟ (یک نفر می تواند ۴ جایزه را برنده شود).	۱																		
۲۱	نشان دهید در یک خانواده ۵ نفری حداقل دو نفر فصل تولدشان یکسان است.	۱																		
	" موفق باشید "	جمع نمره																		
		۲۴																		

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته		رشته: ریاضی فیزیک		ساعت شروع: ۸ صبح		مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه			
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه				تاریخ امتحان: ۱۳۹۹/۰۶/۰۴					
دانش آموزان روزانه سراسر کشور شهریور ماه سال ۱۳۹۹				مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir					
ردیف		راهنمای تصحیح						نمره	
پاسخ سوالات الزامی									
۱	الف) نادرست (۰/۲۵)	کار در کلاس صفحه ۳	ب) درست (۰/۲۵)	(مثال صفحه ۴)	۱				
	پ) نادرست (۰/۲۵)	کار در کلاس صفحه ۷	ت) نادرست (۰/۲۵)	(مشابه قسمت ث کار در کلاس صفحه ۳)					
۲	$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$ (۰/۲۵)								۱/۲۵
	نابرابری آخر برای a, b نامنفی همیشه درست است. (۰/۲۵). اثبات بازگشتی و حکم برقرار است. (مثال صفحه ۷)								
۳	$a 2n+4 \Rightarrow a \underbrace{-2(2n+4)}_{(0/25)} + \underbrace{2(2n+2)}_{(0/25)} \Rightarrow a 1 \Leftrightarrow a=\pm 1 \Leftrightarrow a=1$ (۰/۲۵)								۱/۲۵
	(مشابه کار در کلاس صفحه ۱۱)								
۴	هرگاه p را بر ۶ تقسیم کنیم، خواهیم داشت: $p=6k$ (۱) , $p=6k+1$ (۲) , $p=6k+2=2(3k+1)$ (۳) $p=6k+3=3(2k+1)$ (۴) , $p=6k+4=2(3k+2)$ (۵) , $p=6k+5$ (۶) در حالات (۱)، (۳) و (۵) زوج و در (۴) بر ۳ بخش پذیر است (۰/۲۵) که با اول بودن p تناقض دارد. (۰/۲۵) بنابراین فقط در حالات (۲) یا (۶)، p می تواند عددی اول باشد که حکم اثبات می شود. (۰/۲۵) (مسئله ۲ صفحه ۱۵)								۱/۵
۵	$m=17q+5 \ (q \in \mathbb{Z})$ (۰/۵) $\Rightarrow (2m-5n)=17(2q-5q')-5$ (۰/۲۵) $n=17q'+3 \ (q' \in \mathbb{Z})$ $\Rightarrow (2m-5n)=17(2q-5q'-1)+12$ (۰/۲۵) $\Rightarrow r=12$ (۰/۲۵)								۱/۲۵
۶	$2^5 \equiv 2 \pmod{29} \Rightarrow 2^{10} \equiv 2^2 \pmod{29} \Rightarrow 2^{11} \equiv 8 \pmod{29} \Rightarrow 2^{11}+7 \equiv 15 \equiv 5 \pmod{29}$ (۰/۲۵) رقم یکان برابر ۵ است. (۰/۲۵) (مشابه تمرین ۱۱ صفحه ۲۹)								۱/۲۵
۷	$2x \equiv 19 \pmod{29} \xrightarrow{(29)=1} x \equiv 2 \pmod{29} \Rightarrow x=29k+2 \Rightarrow y=-2k+3$ (۰/۲۵) (مشابه کار در کلاس صفحه ۲۷)								۱
۸	الف) $\Delta(G)=4$, $\delta(G)=0$ (۰/۵) ب) c, a, b, c (۰/۲۵) , c, a, e, c (۰/۲۵) , c, e, d, c (۰/۲۵) پ) $N_G(e)=\{a, c, d\}$ (۰/۷۵) ث) خیر (۰/۲۵) (مفاهیم اساسی گراف از صفحه ۳۲ تا صفحه ۳۹)								۲/۵
۹	$\frac{p(p-1)}{2} = 10 \Leftrightarrow p^2 - p - 20 = 0 \Leftrightarrow p = 5$ (۰/۲۵) رسم گراف (۰/۲۵) 								۱
۱۰	با توجه $\left\lceil \frac{8}{3+1} \right\rceil = 2$ داریم $\gamma(G) \geq 2$. (۰/۲۵) لذا حداقل عدد احاطه گری ۲ است. (۰/۲۵) از طرفی $\{e, c\}$ یک مجموعه احاطه گر است. (۰/۵). پس $\gamma(G) \leq 2$ در نتیجه $\gamma(G) = 2$ (عدد احاطه گری). (قسمت الف تمرین ۳ صفحه ۵۲)								۱/۵
۱۱	$\frac{8!}{3! \times 4!}$ (۰/۷۵) (به راه حل $\binom{8}{4} \binom{4}{3} \binom{1}{1}$ نیز نمره داده شود.) (۰/۷۵) (مشابه مثال صفحه ۵۹)								۰/۷۵
ادامه پاسخها در صفحه دوم									

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته	رشته: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	تاریخ امتحان: ۱۳۹۹/۰۶/۰۴		
دانش آموزان روزانه سراسر کشور شهریور ماه سال ۱۳۹۹	مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir		

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره																
۱۲	(سوال ۳ کار در کلاس صفحه ۶۱) $y_1 = x_1 - 1 \geq 0 \Rightarrow x_1 = 1 + y_1 \text{ (۰/۲۵)} , y_r = x_r - 4 \geq 0 \Rightarrow x_r = 4 + y_r \text{ (۰/۲۵)} \Rightarrow$ $1 + y_1 + x_r + 4 + y_r + x_f + x_d = 14 \text{ (۰/۲۵)} \Rightarrow y_1 + x_r + y_r + x_f + x_d = 9 \text{ (۰/۲۵)}$ $\Rightarrow \text{جواب: } = \begin{pmatrix} 9+5-1 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ (۰/۲۵)}$	۱/۲۵																
۱۳	(توضیحات صفحه ۶۳) <table><tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td></tr><tr><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr><tr><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td></tr><tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td></tr></table> (۰/۵)	۱	۲	۳	۴	۴	۱	۲	۳	۳	۴	۱	۲	۲	۳	۴	۱	۰/۵
۱	۲	۳	۴															
۴	۱	۲	۳															
۳	۴	۱	۲															
۲	۳	۴	۱															

پاسخ سوالات اختیاری

۱۴	$a \equiv b^m \Rightarrow m a-b \text{ (۰/۲۵)} \Rightarrow m (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}) \text{ (۰/۲۵)} \Rightarrow m a^n - b^n \text{ (۰/۲۵)} \Rightarrow a^n \equiv b^n \text{ (۰/۲۵)}$ (مشابه تمرین ۹ صفحه ۲۹)	۱									
۱۵	وجود ندارد. زیرا: (۰/۲۵) زوج $2q = 21$ فرد $\Rightarrow 3 \times 7 = 2q \text{ (۰/۲۵)} \Rightarrow \sum_{i=1}^7 \deg v_i = 2q \text{ (۰/۲۵)}$ (سوال ۸ صفحه ۳۸) همکاران گرامی، در صورتی که دانش آموزی با رسم شکل هم توضیح داد، نمره داده شود.	۱									
۱۶	(صفحه ۳۸) $a, b, c, d \text{ (۰/۲۵)}$, $b, c, d, e \text{ (۰/۲۵)}$ $\bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet$ $a \quad b \quad c \quad d \quad e$ (۰/۵)	۱									
۱۷	در مربع لاتین مقابل، اعداد ۲ رقمی تکراری نداریم. پس دو مربع لاتین، متعامدند. (۰/۲۵) (کار در کلاس صفحه ۶۶) <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>۱۱</td><td>۲۲</td><td>۳۳</td></tr> <tr><td>۳۲</td><td>۱۳</td><td>۲۱</td></tr> <tr><td>۲۳</td><td>۳۱</td><td>۱۲</td></tr> </table> (۰/۷۵)	۱۱	۲۲	۳۳	۳۲	۱۳	۲۱	۲۳	۳۱	۱۲	۱
۱۱	۲۲	۳۳									
۳۲	۱۳	۲۱									
۲۳	۳۱	۱۲									
۱۸	(مثال صفحه ۷۴) $ F \cup V = S - F \cup V = 25 - (15 + 14 - 9) = 5 \text{ (۰/۲۵)}$ (۰/۲۵) (۰/۵)	۱									
۱۹	$A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $b = \{b_1, b_2, \dots, b_6\}$ به ۶ طریق $f(a_1)$ را تعریف کنیم. (۰/۲۵) به ۵ طریق $f(a_2)$ را تعریف کنیم. (۰/۲۵) به ۴ طریق $f(a_3)$ را تعریف کنیم. (۰/۲۵) $f(a_1) = b_1 \vee b_2 \vee \dots \vee b_6 \Rightarrow f(a_2) \neq f(a_1) \Rightarrow f(a_3) \neq f(a_1), f(a_3) \neq f(a_2) \Rightarrow$ یک به یک بنابراین طبق اصل ضرب $6 \times 5 \times 4 = 120$ تابع یک به یک داریم. (۰/۲۵) (به روش $P(6,3) = \frac{6!}{3!} = 120$ نیز نمره داده شود.)	۱									
۲۰	حل مسئله معادل با یافتن تعداد تابع‌های ممکن از یک مجموعه ۴ عضوی به یک مجموعه ۸ عضوی است. (۰/۵) که برابر با 8^4 است. (۰/۵) (مثال صفحه ۷۸)	۱									
۲۱	فصل تولد = لانه = ۴ (۰/۲۵) و افراد خانواده = کبوتر = ۵ (۰/۲۵). طبق اصل لانه کبوتری (۰/۲۵) حداقل یک لانه (فصل) وجود دارد که ۲ کبوتر (دو نفر از اعضای خانواده) در آن قرار می‌گیرند (در یک فصل به دنیا آمده‌اند). (۰/۲۵) (سوال ۳ کار در کلاس صفحه ۸۰)	۱									
۲۴	جمع نمره										

«همکاران گرامی لطفاً برای راه حل‌های صحیح دیگر بارم را به تناسب تقسیم فرمایید.»