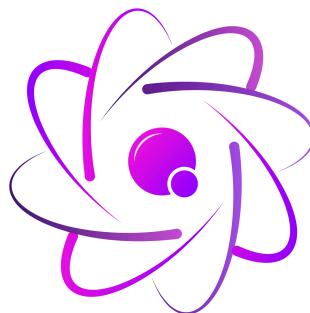




کوانتوم، قدرتمندترین میرکنکور



کتاب درسی * سال تحصیلی ۱۴۰۵-۱۴۰۶

ریاضی و آمار ۳

پایه دوازدهم * رشته‌ی ادبیات و علوم انسانی

سوالات امتحان نهایی با پاسخنامه

همه‌ی نوبت‌ها و رشته‌ها، رایگان و قابل دانلود



مشاوره‌ی تخصصی کنکور

برنامه‌ی هفتگی شخصی و پیگیری روزانه با مشاوران برتر



اپلیکیشن رایگان کوانتوم

تایمر پومودورو، برنامه و چت با مشاور



پاسخ‌برگ آنلاین و تحلیل آزمون

درصد، تراز تخمینی و سرعت پاسخ‌دهی هر درس



همه‌ی کتاب‌های درسی و سوالات امتحان نهایی

دوربین گوشی رو روی کد بگیر یا روی لینک بزن

quantumedu.ir



اینستاگرام

@quantumedu.ir



بله

@quantumedu_ir



تلگرام

@quantumedu_ir



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

اللَّهُمَّ صَلِّ عَلَى مُحَمَّدٍ وَآلِ مُحَمَّدٍ وَعَجِّلْ فَرَجَهُمْ

ریاضی و آمار (۳)

رشته‌های ادبیات و علوم انسانی — علوم و معارف اسلامی

پایه دوازدهم

دوره دوم متوسطه





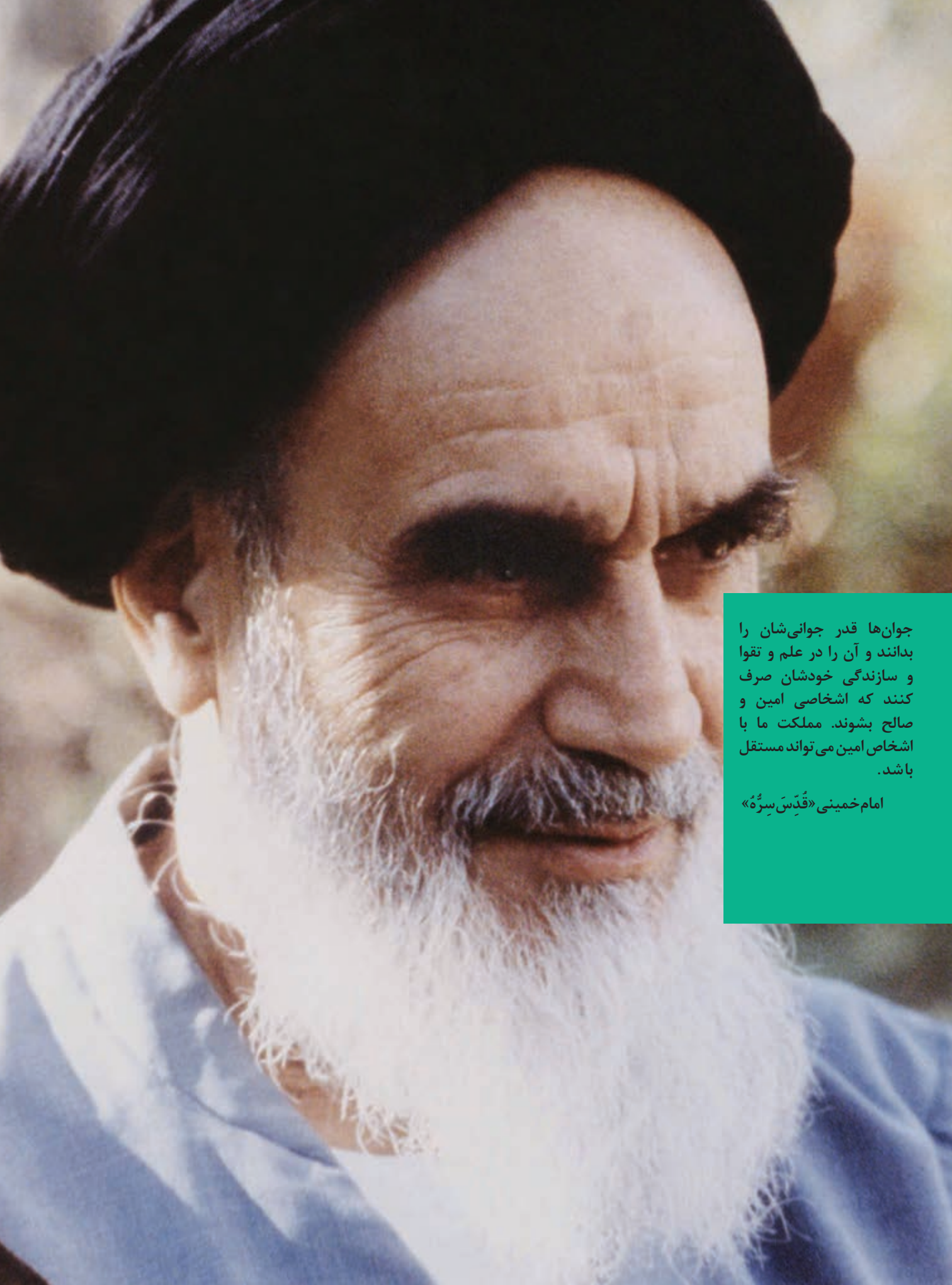
وزارت آموزش و پرورش

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

نام کتاب: ریاضی و آمار (۳) - پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه - ۱۱۲۲۱۲
پدیدآورنده: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تألیف: دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری
شناسه افزوده برنامه‌ریزی و تألیف: سیدمحمد رضا احمدی، حمیدرضا امیری، علی ایرانمنش، مهدی ایزدی، محمدحسن بیژن‌زاده، خسرو داودی، زهرا رحیمی، محمدهاشم رستمی، ابراهیم ریحانی، محمدرضا سیدصالحی، میر شهرام صدر، اکرم قابل رحمت، طاهر قاسمی‌هنری و عادل محمدپور (اعضای شورای برنامه‌ریزی)
مدیریت آماده‌سازی هنری: حمیدرضا امیری، علی ایرانمنش، مهدی ایزدی، آزاده حسین فرزانه، میرشهرام صدر، حسین میرزایی و با همکاری آزاده قاهری و عادل محمدپور در بخش آمار (اعضای گروه تألیف) - افسانه حجتی طباطبایی (ویراستار)
شناسه افزوده آماده‌سازی: اداره کل نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی
نشانی سازمان: احمدرضا امینی (مدیر امور فنی و چاپ) - جواد صفری (مدیر هنری) - سمیه قنبری (صفحه‌آرا) - سیدمهدی حسینی (عکاس) - الهام محبوب، فاطمه رئیس‌یان فیروزآباد (رسام) - سورش سعادت‌مندی، رعنا فرج‌زاده‌دروئی، شاداب ارشادی، سپیده ملک‌ایزدی و راحله زادفتح‌اله (امور آماده‌سازی)
ناشر: تهران: خیابان ایرانشهر شمالی - ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)
چاپخانه: تلفن: ۸۸۸۳۱۱۶۱-۹، دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶، کد پستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹
سال انتشار و نوبت چاپ: وبگاه: www.chap.sch.ir و www.irtextbook.ir
شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران تهران: جاده مخصوص کرج - خیابان ۶۱ (داروپخش)
تلفن: ۴۴۹۸۵۱۶۱-۵، دورنگار: ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی: ۳۷۵۱۵-۱۳۹
شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»
چاپ نهم ۱۴۰۵

شابک ۹۷۸-۹۶۴-۰۵-۳۰۹۷-۹

ISBN: 978-964-05-3097-9



جوان‌ها قدر جوانی‌شان را
بدانند و آن را در علم و تقوا
و سازندگی خودشان صرف
کنند که اشخاصی امین و
صالح بشوند. مملکت ما با
اشخاص امین می‌تواند مستقل
باشد.

امام خمینی «قُدَسِ سِرَّة»

کلیه حقوق مادی و معنوی این کتاب متعلق به سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش است. هرگونه استفاده از کتاب و اجزای آن به صورت چاپی و الکترونیکی و ارائه در پایگاه‌های مجازی، نمایش، اقتباس، تلخیص، تبدیل، ترجمه، عکس‌برداری، نقاشی، تهیه فیلم و تکثیر به هر شکل و نوع، بدون کسب مجوز از این سازمان ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می‌گیرند.

فهرست

فصل ۱ – آمار و احتمال	۱
درس ۱: شمارش	۲
درس ۲: احتمال	۱۲
درس ۳: چرخه آمار در حل مسائل	۲۸
فصل ۲ – الگوهای خطی	۴۵
درس ۱: مدل سازی و دنباله	۴۶
درس ۲: دنباله های حسابی	۶۱
فصل ۳ – الگوهای غیر خطی	۷۳
درس ۱: دنباله هندسی	۷۴
درس ۲: ریشه n ام و توان گویا	۸۶
درس ۳: تابع نمایی	۹۵
منابع	۱۰۵

کتاب حاضر در راستای برنامه درسی ملی و در ادامه تغییر کتاب‌های ریاضی دوره دوم متوسطه تألیف شده است. یکی از تفاوت‌های مهم این کتاب با کتاب قبلی مربوط به دوره پیش‌دانشگاهی، کاهش قابل ملاحظه محتوا است. همانند پایه‌های قبلی، ساختار کتاب براساس سه محور اساسی فعالیت، کار در کلاس و تمرین قرار گرفته است. از این میان، «فعالیت‌ها» موقعیت‌هایی برای یادگیری و ارائه مفاهیم جدید ریاضی فراهم می‌کنند و این امر مستلزم مشارکت جدی دانش‌آموزان است. البته معلم هم در این میان نقشی مهم برای راهنمایی و هدایت کلی فعالیت‌ها به عهده دارد. با توجه به اینکه کتاب برای دانش‌آموزان سطح متوسط طراحی شده است، با درنظر گرفتن شرایط مختلف، امکان غنی‌سازی فعالیت‌ها و یا ساده‌سازی آنها به وسیله معلم وجود دارد. در هر حال تأکید اساسی مؤلفان، محور قرار دادن کتاب درسی در فرایند آموزش است. در همین راستا توجه به انجام فعالیت‌ها در کلاس درس و ایجاد فضای بحث و گفت‌وگو و دادن مجال به دانش‌آموز برای کشف مفاهیم به‌طور جدی توصیه می‌شود.

زمان کلاس درس نباید به مباحثی خارج از اهداف کتاب درسی اختصاص یابد. همچنین نباید آزمون‌های مختلف خارج از مدرسه مبنای آموزش مفاهیم در کلاس درس واقع شوند، بلکه این کتاب درسی است که سطح و سبک آزمون‌ها را مشخص می‌کند. در بسیاری از موارد درباره یک مفهوم، حد و مرزهایی در کتاب رعایت شده است که رعایت این موضوع در ارزشیابی‌ها و آزمون‌های رسمی برای همه طراحان الزامی است. رعایت این محدودیت‌ها موجب افزایش تناسب بین زمان اختصاص یافته به کتاب و محتوای آن خواهد شد. شایسته است همکاران ارجمند بر رعایت این موضوع نظارت دقیق داشته باشند. روند کتاب نشان می‌دهد که ارزشیابی باید در خدمت آموزش باشد. در واقع ارزشیابی باید براساس اهداف کتاب باشد و نه موضوعاتی که احیاناً پیش از این، سال‌ها به صورت سنتی ارائه شده‌اند و یا توسط برخی از کتاب‌های غیراستاندارد توصیه می‌شوند. طرح این‌گونه سؤالات که اهداف آموزشی کتاب را دنبال نمی‌کنند در کلاس درس و نیز در ارزشیابی‌ها، به هیچ عنوان توصیه نمی‌شود.

ارتباط بین ریاضیات مدرسه‌ای و محیط پیرامون و کاربردهای این دانش در زندگی روزمره، که به وضوح در اسناد بالادستی مورد تأکید قرار گرفته است، به صورت تدریجی خود را در کتاب‌های درسی نشان می‌دهد. تلاش برای برقراری این ارتباط در تصاویر کتاب نیز قابل مشاهده است که امید است مورد توجه معلمان و دانش‌آموزان عزیز قرار گیرد.

اگر مهم‌ترین هدف آموزش ریاضی را پرورش تفکر ریاضی بدانیم، دیگر استفاده افراطی از فرمول‌ها، الگوریتم‌ها، قواعد و دستورها بدون آگاهی از چگونگی و چرایی عملکرد آنها، جایگاهی در آموزش ریاضی مدرسه‌ای نخواهد داشت. فرصت حضور دانش‌آموز در کلاس درس را نباید به سادگی از دست داد. فرایندهایی مانند استدلال، تعمیم، حل مسئله، طرح مسئله و موضوعاتی نظیر مسائل باز پاسخ، بازنمایی‌های چندگانه و گفتمان ریاضی نقش مهمی در پرورش تفکر ریاضی دانش‌آموزان دارد.

مؤلفان از کلیه امکانات موجود نظیر سامانه اعتبارسنجی، وبگاه گروه ریاضی دفتر تألیف، پیام‌نگار (ایمیل)، دعوت از دبیران مجرب برای حضور در جلسات نقد و بررسی کتاب و دیگر رسانه‌های در دسترس برای دریافت دیدگاه‌ها، نقدها و نظرات دبیران محترم سراسر کشور بهره گرفته‌اند. در راستای مشارکت دبیران محترم ریاضی، پاره‌ای از تصاویر و عکس‌های مورد استفاده در کتاب توسط این عزیزان از استان‌های مختلف کشور به گروه ریاضی ارسال شده است، که لازم است از زحمات آنها تشکر و قدردانی شود. اعضای تیم تألیف به حضور مشارکت جدی همکاران ارجمند در امر نقد و بررسی کتاب افتخار می‌کنند. امید که همچنان شاهد این تعامل و ارتباط مؤثر باشیم. گروه تألیف آمادگی دریافت نظرات و دیدگاه‌های تمامی همکاران و اساتید را از طریق رمزینه سریع پاسخ نظرسنجی کتاب‌های درسی دارد.

مؤلفان



فصل ۱ - آمار و احتمال

شمارش

درس ۱

احتمال

درس ۲

چرخه آمار در حل مسائل

درس ۳



«... و أَحَاطَ بِمَا لَدَيْهِمْ وَأَحْصَىٰ كُلَّ شَيْءٍ عَدَدًا» (آیه ۲۸ / سورة مبارکه جن)
«... و او (خداوند) به آنچه نزد آنهاست احاطه دارد و همه چیز را شمارش کرده است»



روستای مشکله - استان گیلان (شهرستان املش)

درس ۱

شمارش

فعالیت



۱. فرض کنید در کتابخانه مدرسه ۳۰ کتاب متفاوت درباره روان‌شناسی و ۲۵ کتاب متفاوت با موضوع تعلیم و تربیت اسلامی وجود دارد. اگر دانش‌آموزی فرصت داشته باشد فقط یک کتاب با موضوع روان‌شناسی یا تعلیم و تربیت اسلامی مطالعه کند، برای این کار چند انتخاب دارد؟

واضح است که او می‌تواند یکی از ۳۰ کتاب روان‌شناسی («یا») یکی از ۲۵ کتاب تعلیم و تربیت اسلامی را انتخاب و مطالعه کند و در مجموع، $55 = 30 + 25$ راه انتخاب دارد.

۲. خانم فاطمی پرستار بیمارستان حضرت زینب (س) است. او می‌تواند به صورت «رایگان» (استفاده از سرویس بیمارستان یا پیاده‌روی) یا با «پرداخت هزینه» (استفاده از تاکسی، اتوبوس یا مترو) به محل کارش برود. خانم فاطمی برای رسیدن به محل کارش چند انتخاب دارد؟ همه حالت‌های ممکن را که او می‌تواند به صورت رایگان («یا») با پرداخت هزینه به محل کارش برود، در یک مجموعه بنویسید: $A = \{\text{پیاده‌روی}, \dots, \dots, \dots, \dots\}$.

شما برای حل کردن هر دو قسمت، از قاعده یا اصلی استفاده کردید که به اصل جمع معروف است و به صورت زیر بیان می‌شود.

اصل جمع

اگر بتوان عملی را به m طریق و عمل دیگری را به n طریق انجام داد، و این دو عمل را نتوان با هم انجام داد، در این صورت به $(m+n)$ طریق می‌توان عمل اول («یا») عمل دوم را انجام داد. (اصل جمع به بیش از دو عمل نیز قابل تعمیم است.)

مثال: شما به چند طریق می توانید فقط یک خودکار یا یک مداد یا یک روان نویس را از بین چهار خودکار با چهار رنگ مختلف و پنج مداد با رنگ های متفاوت و سه روان نویس با رنگ های متمایز انتخاب کنید؟

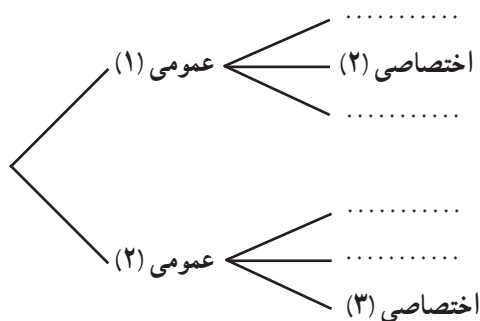
حل: در صورت مسئله از لفظ «یا» استفاده شده و قید شده است که فقط یکی از این اشیا می تواند انتخاب شود؛ بنابراین، طبق اصل جمع داریم:

$$۱۲ = ۵ + ۴ + ۳ = \text{تعداد انتخاب ها}$$



فعالیت

فرض کنید دانشجویی می خواهد از بین دو درس عمومی ارائه شده، یک درس عمومی و از میان سه درس اختصاصی ارائه شده، یک درس را انتخاب کند. او به چند طریق می تواند یک درس عمومی «و» یک درس اختصاصی خود را انتخاب کند؟ با کامل کردن نمودار زیر به سؤال بالا پاسخ دهید:



انتخاب درس عمومی به دو طریق امکان پذیر است و هر کدام که انتخاب شود برای انتخاب درس اختصاصی راه انتخاب وجود دارد. پس در کل، این کار به $..... = \times$ طریق امکان پذیر است.

اصل ضرب

اگر عملی طی دو مرحله اول و دوم انجام پذیرد، طوری که در مرحله اول به m طریق «و» در مرحله دوم هر کدام از این m طریق به n روش انجام پذیر باشند، در کل آن عمل به $m \times n$ طریق انجام پذیر است. (اصل ضرب قابل تعمیم به بیشتر از دو مرحله است.)

مثال: مدیرعامل یک شرکت برای تصمیم‌گیری درباره توسعه شرکت، ۱۵ نفر از سهام‌داران و هیئت‌امنا را در دو گروه A و B دسته‌بندی می‌کند. ۷ نفر از آنها در گروه A و ۸ نفر در گروه B قرار می‌گیرند. اعضای گروه A باید درباره نتایج مساعد احتمالی و اعضای گروه B درباره نتایج نامساعد احتمالی تحقیق کنند.

الف) مدیرعامل به چند طریق می‌تواند فقط با یک نفر از این ۱۵ نفر مشورت کند؟
 ب) اگر مدیرعامل بخواهد از هر دو گروه مشورت بگیرد به شرط آنکه از هر گروه ۱ نفر نتیجه تحقیقاتش را با او در میان بگذارد، به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟

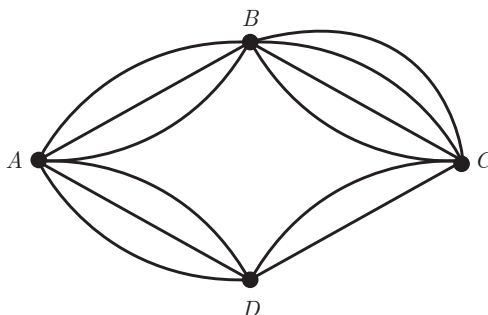
راه‌حل:

الف) از اصل جمع استفاده می‌کنیم؛ زیرا مدیرعامل می‌تواند یک نفر از گروه A «یا» یک نفر از گروه B را به $7+8=15$ طریق انتخاب کند.

ب) در این حالت، مدیرعامل می‌تواند به ۷ طریق یک نفر از گروه A را انتخاب کند «و» به ۸ طریق یک نفر از گروه B را انتخاب کند. بنابراین، طبق اصل ضرب به $7 \times 8 = 56$ طریق می‌تواند این کار را انجام دهد.

کار در کلاس

مطابق شکل زیر، میان چهار شهر A, B, C, D راه‌هایی وجود دارد؛ مشخص کنید که به چند طریق می‌توان:
 الف) از شهر A به شهر C و از طریق شهر B سفر کرد؟
 از A به B سه راه وجود دارد. از هر کدام از این سه راه که به B برسیم، برای رفتن به C چهار راه موجود است؛ بنابراین، طبق اصل ضرب به $3 \times 4 = 12$ طریق می‌توان از A به C (از طریق B) سفر کرد.



ب) از شهر A به شهر C سفر کرد؟
 برای سفر از A به C می‌توان یکی از دو مسیر $A \rightarrow B \rightarrow C$ «یا» $A \rightarrow D \rightarrow C$ را انتخاب کرد (اصل...); بنابراین:
 تعداد راه‌های سفر از A به C از طریق شهر D + تعداد راه‌های سفر از A به C از طریق شهر B = تعداد راه‌های سفر از A به C

$$= 3 \times 4 + 3 \times \dots = \dots$$

پ) از شهر B به شهر D سفر کرد؟

برای رفتن از شهر B به شهر D می‌توان یکی از دو مسیر $B \rightarrow C \rightarrow D$ «یا» $B \rightarrow A \rightarrow D$ را انتخاب کرد؛ پس داریم:

$$17 = 4 \times \dots + \dots \times \dots = \text{تعداد راه‌های مسافرت از } B \text{ به } D$$

نماد فاکتوریل

همان طور که برای ضرب یک عدد، مانند a ، در خودش از نماد توان استفاده می کنیم و می نویسیم $a \times a = a^2$ ، برای ضرب یک عدد طبیعی و بزرگ تر از ۱ در تمام اعداد طبیعی کوچک تر از خودش از نماد فاکتوریل «!» استفاده می کنیم. برای مثال، $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ و $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$.

قرارداد: برای اعداد صفر و یک، فاکتوریل را به صورت $0! = 1$ و $1! = 1$ تعریف می کنیم.
مثال: حاصل هر یک را به ساده ترین صورت بنویسید.

الف) $4! \times 2 = (4 \times 3 \times 2 \times 1) \times 2 = 24 \times 2 = 48$

ب) $\frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times \overbrace{(3 \times 2 \times 1)}^{3!}}{\underbrace{(3 \times 2 \times 1)}_{3!}} = 5 \times 4 = 20$

پ) $\frac{10!}{7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 720$

ت) $\frac{3! \times 5! \times 0!}{7! \times 1!} = \frac{\cancel{3!} \times \cancel{5!} \times 1}{7 \times \cancel{5!} \times 1} = \frac{1}{7}$

جایگشت

چهار شیء متمایز a, b, c, d را در نظر بگیرید. آرایش یا حالت $abcd$ ، که از کنار هم قرار گرفتن این چهار شیء به دست آمده، با آرایش $acbd$ متفاوت است و به هر کدام از آنها یک جایگشت ۴ تایی از این ۴ شیء گفته می شود. در حالت کلی، «هر حالت از کنار هم قرار گرفتن n شیء متمایز را یک جایگشت n تایی از آن شیء می نامیم.»

فعالیت

۱- اگر افراد A, B, C بخواهند در یک همایش سخنرانی کنند، این عمل به چند طریق امکان پذیر است؟

$$\begin{array}{ccc} 3 & 2 & 1 \\ \hline A \text{ یا } B \text{ یا } C & \text{یکی از ۲ نفر باقی مانده} & 1 \text{ نفر باقی مانده} \end{array} \rightarrow 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$$ABC - ACB - BAC - BCA - CAB - CBA$$

↓
(اول شخص B ، بعد C و آخر A سخنرانی کرده اند)

۲- با ارقام ۲، ۷، ۴، ۵ و ۶ چند عدد ۵ رقمی (بدون تکرار ارقام) می توان نوشت؟

$$\rightarrow 5 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \rightarrow \text{تعداد اعداد ۵ رقمی} = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5!$$

۳- ثابت کنید تعداد کل جایگشت‌های n تایی از n شیء متمایز، برابر است با $n!$.

حل: اگر برای هر کدام از این اشیاء یک مکان در نظر بگیریم (مطابق شکل زیر)، برای مکان اول از چپ (یا راست) n انتخاب داریم و برای مکان بعدی انتخاب داریم و ... و برای مکان آخر یک انتخاب داریم و بنابر اصل ضرب، کل حالت‌ها برابر است با،
 $n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1 = \dots\dots\dots$

$$\underline{n} \quad \underline{n-1} \quad \underline{n-2} \quad \dots \quad \underline{2} \quad \underline{1}$$

هر حالت از کنار هم قرار گرفتن n شیء متمایز را یک جایگشت n تایی از آن شیء می‌نامیم، و تعداد این جایگشت‌ها برابر است با $n!$.

کار در کلاس

ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ مفروض‌اند؛ با این ارقام :

۱. چند عدد پنج رقمی و بدون تکرار ارقام، می‌توان نوشت؟

تعداد انتخاب‌ها $\rightarrow$ $\frac{5}{5 \text{ یا } 4 \text{ یا } 3 \text{ یا } 2 \text{ یا } 1} \quad \frac{5}{\dots} \quad \frac{3}{\dots} \quad \frac{2}{\dots} \quad \frac{1}{\dots} \xrightarrow{\text{اصل ضرب}} 5 \times 4! = 600$

(توجه دارید که صفر در سمت چپ اعداد خوانده نمی‌شود.)

۲. چند عدد ۵ رقمی و فرد (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟

(می‌دانیم که اگر رقم یکان یک عدد، فرد باشد آن عدد فرد است.) بنابرین :

تعداد انتخاب‌ها $\rightarrow$ $\frac{4}{4 \text{ یا } 3 \text{ یا } 1} \quad \frac{4}{\dots} \quad \frac{2}{\dots} \quad \frac{1}{\dots} \xrightarrow{\text{اصل ضرب}} 4 \times 4 \times \dots \times 2 \times \dots = 288$

۳. چند عدد پنج رقمی و زوج (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟

روش اول : تعداد ۵ رقمی‌های فرد - تعداد کل ۵ رقمی‌ها = تعداد ۵ رقمی‌های زوج
 $= 600 - \dots = \dots$

روش دوم : اعداد زوج و ۵ رقمی‌ای که با این ارقام می‌توان ساخت، یا به صفر ختم می‌شوند یا به ۲ و ۴. تعداد ارقام را در هر حالت جدا محاسبه می‌کنیم و بنابر اصل جمع، آنها را جمع می‌کنیم :

الف) ۵ رقمی‌هایی که به صفر ختم می‌شوند

تعداد انتخاب‌ها $\rightarrow$ $\frac{5}{5} \quad \frac{3}{\dots} \quad \frac{1}{\dots} \quad \frac{1}{\text{صفر}} \xrightarrow{\text{اصل ضرب}} 5! = \dots$

ب) ۵ رقمی‌هایی که به ۲ یا ۴ ختم می‌شوند :

تعداد انتخاب‌ها $\rightarrow$ $\frac{4}{4 \text{ یا } 2} \quad \frac{2}{\dots} \quad \frac{2}{\dots} \quad \frac{2}{\dots} \xrightarrow{\text{اصل ضرب}} 4 \times \dots \times \dots \times 2 \times 2 = 192$

$120 + 192 = 312 = \text{تعداد ۵ رقمی‌های زوج}$

۴. چند عدد ۵ رقمی و مضرب ۵ (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟

۵ رقمی‌هایی که به ۵ ختم می‌شوند + ۵ رقمی‌هایی که به صفر ختم می‌شوند = تعداد ۵ رقمی‌های مضرب ۵

$$\text{تعداد انتخاب‌ها} \rightarrow \frac{\text{اصل ضرب}}{\text{صفر}} \frac{1}{\dots} \frac{4}{\dots} \frac{\dots}{\dots} \rightarrow \dots! = \dots$$

$$\text{تعداد انتخاب‌ها} \rightarrow \frac{\text{اصل ضرب}}{5} \frac{1}{\dots} \frac{\dots}{\dots} \frac{\dots}{\dots} \frac{4}{\dots} \rightarrow 4 \times \dots \times \dots \times \dots \times 1 = \dots$$

$$5 \text{ مضرب } 5 = \dots + \dots = 216$$

تبدیل (انتخاب r شیء از بین n شیء، که در آن جابه‌جایی اشیاء انتخاب شده اهمیت دارد).

فعالیت

۱. فرض کنید بخواهیم تعداد اعداد ۴ رقمی را که با ارقام ۱ تا ۷ می‌توان نوشت، حساب کنیم. در این صورت، داریم: (تکرار ارقام مجاز نیست).

$$\text{تعداد انتخاب‌ها} \rightarrow \frac{\text{اصل ضرب}}{7 \times \dots \times \dots \times \dots} \frac{4}{\dots} \frac{5}{\dots} \frac{6}{\dots} \frac{7}{\dots}$$

$$\text{از طرفی: } 7 \times 6 \times 5 \times 4 = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times \dots}{3!} = \frac{7!}{3!} = \frac{7!}{(7-4)!}$$

(توجه دارید که با جابه‌جایی هر رقم از این عدد ۴ رقمی با رقم دیگر، یک عدد ۴ رقمی جدید حاصل می‌شود. به عبارت دیگر، در این جایگشت‌ها، ترتیب قرار گرفتن اشیاء انتخاب شده، اهمیت دارد).

۲. به چند طریق می‌توانیم سه کتاب را از بین ۵ کتاب متمایز، انتخاب کنیم و در یک ردیف بچینیم؟

$$\text{تعداد انتخاب‌ها} \rightarrow \frac{\text{اصل ضرب}}{5 \times \dots \times \dots} \frac{5}{\dots} \rightarrow 5 \times \dots \times \dots = \dots$$

$$\text{از طرفی: } \frac{5!}{(5-3)!} = \dots$$



۳. در حالت کلی، نشان دهید تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n ($r \leq n$)، که جابه‌جایی r شیء انتخاب شده اهمیت داشته باشد،

$$\frac{n!}{(n-r)!} \text{ برابر است با:}$$

$$\begin{aligned} \text{تعداد انتخاب‌ها} &\rightarrow \frac{n}{n} \frac{n-1}{n-1} \dots \dots \frac{(n-r+2)}{(n-r+2)} \frac{(n-r+1)}{(n-r+1)} \\ \text{طبق اصل ضرب} &\rightarrow n(n-1)(n-2) \dots (n-r+2)(\dots\dots\dots) \\ &= \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1) \times (\dots\dots\dots)!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!} \end{aligned}$$

تبدیل r شیء از n شیء یا جایگشت‌ها r شیء از n شیء
تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n شیء (که جابه‌جایی یا ترتیب انتخاب مهم باشد) را با نماد $P(n, r)$ نشان می‌دهیم و بنابر دستور زیر محاسبه می‌کنیم:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال: با ارقام ۱، ۲، ۴، ۶، ۸، ۹ و ۷ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت؟ (تکرار مجاز نیست).
حل: در واقع باید سه رقم را از بین ۷ رقم داده شده انتخاب کنیم که البته جابه‌جایی آنها پس از انتخاب، عدد جدیدی می‌سازد و اهمیت دارد.

$$\text{روش اول: } P(7, 3) = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 210$$

$$\text{روش دوم: } \frac{7}{7} \frac{6}{6} \frac{5}{5} \xrightarrow{\text{اصل ضرب}} 7 \times 6 \times 5 = 210$$

ترکیب (انتخاب r شیء از بین n شیء که در آن جابه‌جایی اشیای انتخاب شده، اهمیت ندارد).

فعالیت

فرض کنید بخواهیم از میان ارقام ۱، ۲، ۴، ۶ و ۳ رقم انتخاب کنیم و با آنها یک مجموعه سه عضوی تشکیل دهیم. با توجه به تعریف مجموعه که بر اساس آن، جابه‌جایی اعضای یک مجموعه، مجموعه جدیدی تولید نمی‌کند و نیز چون سه رقم انتخاب شده، ۳! جایگشت دارند که برای تشکیل مجموعه فقط یک مجموعه ساخته می‌شود (هر ۶ حالت ۱ مجموعه می‌سازد)، برای رسیدن به جواب مسئله کافی است کل جایگشت‌های سه تایی از ۴ رقم (انتخاب‌های سه تایی از بین ۴ رقم) را بر تقسیم کنیم.

$$\text{تعداد مجموعه های سه عضوی} = \frac{P(4,3)}{3!} = \frac{4!}{1! \times 3!} = 4$$

انتخاب سه رقم	۱,۲,۴	۱,۲,۶	۱,۴,۶	۲,۴,۶
جایگشت های سه رقم انتخاب شده	۱۲۴	۱۲۶	۱۴۶	۲۴۶
	۱۴۲	۱۶۲	۱۶۴	۲۶۴
	۲۴۱	۲۱۶	۴۱۶	۴۲۶
	۲۱۴	۲۶۱	۴۶۱	۴۶۲
	۴۱۲	۶۱۲	۶۱۴	۶۲۴
	۴۲۱	۶۲۱	۶۴۱	۶۴۲
	$A_1 = \{1,2,4\}$	$A_2 = \{\dots, \dots, \dots\}$	$A_3 = \{1,4,6\}$	$A_4 = \{\dots, \dots, \dots\}$

$$\text{تعداد مجموعه های سه عضوی} = \frac{24}{6} = 4$$

ترکیب r شیء از n شیء

تعداد انتخاب های r شیء از بین n شیء را که جابه جایی اشیای انتخاب شده پس از انتخاب، حالت جدید تولید نکرده و ترتیب انتخاب اهمیت نداشته باشد، با $C_r^n = \binom{n}{r}$ نشان می دهیم و بنابر دستور زیر محاسبه می کنیم.

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال: به چند طریق می توانیم سه کتاب را از بین ۷ کتاب انتخاب کنیم و به دوستان هدیه بدهیم؟

حل: در هدیه دادن، ترتیب مهم نیست؛ بنابراین، از ترکیب استفاده می کنیم،

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \times 4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3! \times 4!} = 35$$

کار در کلاس

۱. به چند طریق می توان با ارقام ۱ تا ۹، عددی ۵ رقمی ساخت؟ (تکرار مجاز نیست.)

روش اول: $\underline{\quad \dots \quad} \underline{\quad 8 \quad} \underline{\quad \dots \quad} \underline{\quad \dots \quad} \underline{\quad 5 \quad} \longrightarrow \dots \times 8 \times \dots \times \dots \times 5$

روش دوم: $P(9, \dots) = \frac{9!}{(9 - \dots)!} = \dots$

۲. به چند طریق می توان از بین ۹ نفر یک تیم والیبال ۶ نفره تشکیل داد؟
در ساختن تیم با جابه جایی افراد انتخاب شده، تیم جدیدی تولید نمی شود بنابراین، از ترکیب استفاده می کنیم :

$$\text{تعداد تیم های ۶ نفره} = \binom{9}{6} = \frac{9!}{6! \times \dots} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times \dots}{6! \times \dots} = 84$$

۳. مجموعه ۸ عضوی $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ چند زیرمجموعه سه عضوی دارد؟
هر سه عضو از این ۸ عضو که انتخاب شود، فقط یک زیرمجموعه سه عضوی می سازد (در مجموعه ها جابه جایی اعضا اهمیت ندارد)؛ بنابراین، داریم :

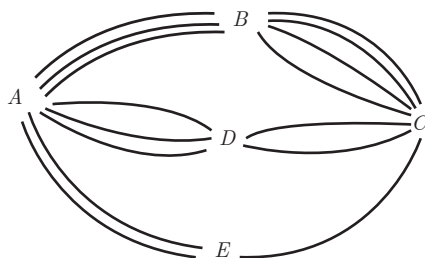
$$\text{تعداد زیرمجموعه های ۳ عضوی} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{\dots \times \dots} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times \dots}{\dots \times \dots} = 56$$

۴. در جعبه ای ۴ مهره قرمز و ۵ مهره آبی وجود دارد. به چند طریق می توانیم سه مهره از این جعبه خارج کنیم؟
در انتخاب مهره های رنگی نیز ترتیب مهم نیست (اگر ۲ مهره قرمز و ۱ مهره آبی خارج شود، اهمیت ندارد که با چه ترتیبی خارج شده اند. در هر صورت، ۲ قرمز و ۱ آبی خارج شده است) و بنابراین داریم :

$$\text{تعداد انتخاب ۳ مهره از بین ۹ مهره} = \binom{9}{3} = \frac{9!}{3! \times \dots} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times \dots}{3! \times \dots} = 84$$

تمرین

۱. می خواهیم از بین ۱۰ دانش آموز کلاس دهم و ۱۱ دانش آموز کلاس یازدهم و ۱۲ دانش آموز کلاس دوازدهم یک دانش آموز انتخاب کنیم؛ به چند طریق می توانیم این دانش آموز را انتخاب کنیم؟
۲. بین پنج شهر A, B, C, D, E مطابق شکل زیر راه هایی وجود دارد که همه دو طرفه اند. مشخص کنید به چند طریق می توان :
(الف) از شهر A به شهر C مسافرت کرد؟
(ب) از شهر A به شهر C و از طریق شهر B مسافرت رفت و برگشت انجام داد؟
(پ) از شهر D بدون عبور از شهر E به شهر A مسافرت کرد؟



۳. با حروف کلمه «ولایت» و بدون تکرار حروف : (با معنی یا بی معنی)

الف) چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت؟

ب) چند کلمه ۳ حرفی می توان نوشت که به «ی» ختم شوند؟

پ) چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت که با «و» شروع و به «ل» ختم شوند؟

۴. یک دوره بازی فوتبال بین ۱۰ تیم فوتبال، به صورت رفت و برگشت انجام می شود. اگر همه تیم ها با هم بازی داشته باشند، در پایان دوره چند بازی انجام شده است؟

۵. یک کارخانه خودروسازی خودروهایی در ۷ رنگ، با ۲ حجم موتور و ۳ نوع مختلف جلو داشبورد تولید می کند. یک خریدار برای خرید یک خودرو از این کارخانه چند انتخاب دارد؟

۶. مجموعه $A = \{1, 2, 4, 6, 8, 9\}$ مفروض است؛

الف) با ارقام موجود در این مجموعه چند عدد ۵ رقمی و زوج (بدون تکرار ارقام) می توان ساخت؟

ب) چند عدد ۵ رقمی و بزرگتر از ۸۰۰۰۰ می توان نوشت؟

پ) مجموعه A چند زیرمجموعه سه عضوی دارد؟

ت) مجموعه A چند زیرمجموعه سه عضوی و شامل رقم ۸ دارد؟

۷. روی محیط یک دایره ۱۲ نقطه وجود دارد. مشخص کنید : الف) با این دوازده نقطه، چه تعداد مثلث می توان تشکیل داد؟

ب) چه تعداد وتر می توان تشکیل داد؟

۸. می خواهیم از بین ۵ دانش آموز پایه یازدهم و ۶ دانش آموز پایه دوازدهم افرادی را انتخاب کنیم و یک تیم ۶ نفره والیبال تشکیل

دهیم. مشخص کنید به چند طریق می توانیم این تیم را تشکیل بدهیم؛ هرگاه بخواهیم :

الف) به تعداد مساوی دانش آموز پایه یازدهم و دوازدهم در تیم حضور داشته باشند.

ب) کاپیتان تیم فرد مشخصی از پایه دوازدهم باشد.

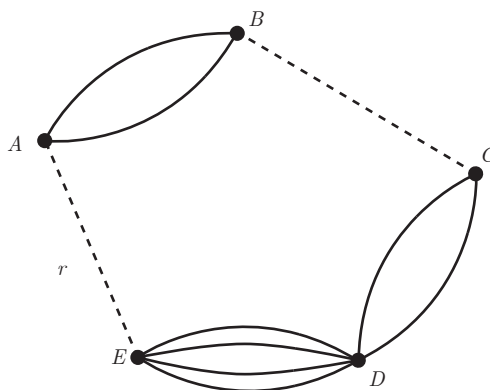
پ) حداقل ۴ نفر از اعضای تیم، دانش آموز پایه دوازدهم باشند.

ت) فقط ۲ نفر از اعضای تیم از پایه یازدهم باشند.

۹. مسئله ای طرح کنید که پاسخ آن به صورت $(2 \times 3 + 3 \times 4 + 3^2)$ باشد.

۱۰. تعداد راه ها یا جاده ها از شهر B به C و از شهر A به E را طوری تعریف کنید که با توجه به شکل زیر بتوان به ۲۰ طریق از

شهر A به شهر D سفر کرد.



درس ۲

احتمال

فعالیت

نرگس هر روز صبح ساعت ۷ از منزل خارج می شود؛ با وسایل نقلیه عمومی به مدرسه می رود و به طور معمول، قبل از ملیکا به مدرسه می رسد. امروز صبح نیز نرگس مانند هر روز رأس ساعت ۷ از منزل خارج شده است. آیا می توانید به طور قطع بگویید که او قبل از ملیکا به مدرسه می رسد؟ هیچ کس نمی تواند به این پرسش پاسخ قطعی دهد. تجربه نشان داده است که اگر وضعیت مانند هر روز عادی باشد، نرگس به موقع به مدرسه می رسد، اما آیا وضعیت همیشه عادی است؟ عامل های زیادی می توانند وضع را از حالت عادی خارج کنند؛ مانند میزان ترافیک. از طرفی رفت و آمد در خیابان ها همیشه در حال تغییر است، آغاز حرکت و سرعت وسایل نقلیه عمومی به طور معمول منظم نیست و ... بنابراین: دو وضعیت وجود دارد: یکی اینکه نرگس قبل از ملیکا به مدرسه برسد و دوم اینکه نرگس قبل از ملیکا به مدرسه نرسد.



پدیده هایی وجود دارند که نتیجه آنها از قبل به طور قطع مشخص نیست اما از وقوع همه حالت های ممکن در آنها اطلاع داریم. برای مثال، وقتی از کیسه ای که شامل پنج مهره قرمز و یک مهره سبز است، به طور تصادفی مهره ای خارج می کنیم، می دانیم که رنگ مهره خارج شده سبز یا قرمز است اما قبل از بیرون کشیدن مهره، رنگ آن به طور قطعی مشخص نیست. این گونه آزمایش ها را آزمایش های تصادفی می نامیم.

به پدیده ها یا آزمایش هایی که نتیجه آنها قبل از اجرای آزمایش به طور قطع مشخص نیست، پدیده یا آزمایش تصادفی می گویند. در پدیده های تصادفی از همه نتیجه های ممکن اطلاع داریم اما از اینکه کدام حالت قطعاً رخ می دهد، اطمینان نداریم. به هر یک از نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی، برآمد می گوئیم.

۱. چند آزمایش تصادفی مثال بزنید.
به آزمایش‌هایی که نتیجه آنها قبل از اجرای آزمایش به طور قطع مشخص باشد، آزمایش‌ها یا پدیده‌های قطعی می‌گوییم.
برای مثال، چنانچه سنگی را به داخل استخر آبی پرتاب کنیم، قبل از اجرای آزمایش می‌دانیم که سنگ به داخل آب فرو می‌رود یا پیش از پرتاب یک سکه، می‌دانیم که سکه روی زمین می‌نشیند. این‌گونه پدیده‌ها، آزمایش‌هایی قطعی هستند.
۲. چند آزمایش قطعی مثال بزنید.

کار در کلاس

۱. کدام یک از پدیده‌های زیر تصادفی و کدام یک قطعی است؟ چرا؟
(الف) وجود دانش‌آموزی که سن او بیشتر از ده سال باشد، در کلاس پایه دوازدهم؛
(ب) در ابتدای مسابقه فوتبال، پرتاب سکه‌ای که در یک طرف آن عدد ۱ و در طرف دیگرش عدد ۲ حک شده باشد؛
(پ) مشاهده دو مهره سفید، پس از خارج کردن دو مهره از جعبه‌ای که در آن ۷ مهره سفید وجود دارد؛
(ت) پیش‌بینی نتیجه بازی فوتبال بین دو تیم، قبل از بازی؛
(ث) در یک بازی بین دو نفر، سکه‌ای پرتاب می‌شود و به دنبال آن تاسی انداخته می‌شود. اگر شخصی سکه‌اش رو و تاسش زوج بیاید، برنده است. آیا قبل از بازی می‌توان نفر برنده را مشخص کرد؟
۲. از ۳ مداد و ۵ خودکاری که در یک جعبه قرار دارند، به طور تصادفی یکی از آنها را خارج می‌کنیم.
(الف) آیا مجموعه دو عضوی {خودکار، مداد} می‌تواند همه برآمدهای ممکن این آزمایش تصادفی را نشان دهد؟
(ب) به نظر شما چگونه می‌توان همه برآمدهای ممکن این آزمایش تصادفی را مشخص کرد؟
در این کتاب، اشیای مورد بحث را با شماره‌گذاری متمایز می‌کنیم.



فضای نمونه

در پرتاب یک تاس بعد از آنکه تاس به زمین نشست، یکی از برآمدهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ را خواهیم داشت. همه برآمدهای ممکن در یک آزمایش تصادفی، مجموعه‌ای را تشکیل می‌دهد که به آن فضای نمونه می‌گوییم و آن را با حرف S نمایش می‌دهیم.

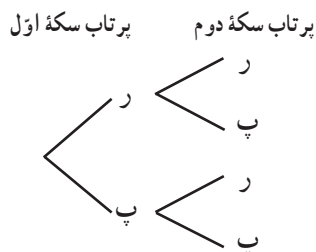


بنابراین، در پرتاب یک تاس، فضای نمونه برابر است با: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

فعالیت

فضای نمونه هر یک از آزمایش‌های تصادفی زیر را بنویسید.

۱. پرتاب دو سکه باهم.



$$S = \{(ر, ر), (ر, پ), (پ, ر), (پ, پ)\}$$

۲. پرتاب سه سکه با هم (پرتاب یک سکه سه بار)

۳. پرتاب یک تاس و یک سکه باهم.

کار در کلاس

۱. برای تعیین فضای نمونه پرتاب دو تاس آبی و قرمز، جدول زیر را کامل کنید. سپس به کمک اصل ضرب، درستی تعداد کل حالات موجود در جدول را بررسی کنید.

	(۱, ۱)	(۱, ۲)				(۱, ۶)
	(۲, ۱)	(۲, ۲)				
			(۳, ۳)		(۳, ۵)	
				(۴, ۴)		
			(۵, ۳)			
						(۶, ۶)

۲. سه دوست با نام‌های علی، پارسا و محمد در یک ردیف کنار هم می‌نشینند. فضای نمونه این آزمایش تصادفی را مشخص کنید. چگونه می‌توان تعداد همه برآمدهای این آزمایش تصادفی را بدون شمردن، مشخص کرد؟
۳. در کیسه‌ای ۳ مهره قرمز، ۴ مهره آبی و ۴ مهره سبز وجود دارد. به طور تصادفی سه مهره را هم‌زمان از کیسه خارج می‌کنیم. تعداد اعضای فضای نمونه این پدیده تصادفی را مشخص کنید.

پیشامد

با مفهوم مجموعه و زیرمجموعه در کلاس نهم آشنا شده‌اید. مجموعه A را زیرمجموعه B می‌گوییم، هرگاه هر عضو مجموعه A عضوی از مجموعه B باشد؛ در این صورت می‌نویسیم: $A \subseteq B$. برای مثال:

$$\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

از طرفی، می‌دانیم $A \subseteq A$ ؛ یعنی هر مجموعه‌ای زیرمجموعه خودش است و مجموعه تهی زیرمجموعه همه مجموعه‌ها است؛ یعنی $\emptyset \subseteq A$.

مثال: تمام زیرمجموعه‌های $A = \{a, b, c\}$ را بنویسید.

حل:

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$$

مثال: در پرتاب یک تاس، پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

الف) عدد کوچک‌تر از ۷ ظاهر شود. ب) عدد بزرگ‌تر از ۷ ظاهر شود.

حل:

$$\text{الف) } A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad \text{ب) } A = \{ \}$$

به هر یک از زیرمجموعه‌های فضای نمونه S یک پیشامد می‌گویند. از آنجا که $\emptyset \subseteq S$ ، پس $\emptyset$ یک پیشامد روی S است و آن را پیشامد غیرممکن (نشدنی)، همچنین $S \subseteq S$ پس S نیز یک پیشامد است که آن را پیشامد حتمی می‌نامیم.

کار در کلاس

۱. سکه‌ای را یک‌بار پرتاب می‌کنیم؛ می‌دانیم $\{پ, ر\} = S$. تمام پیشامدهای ممکن برای این فضای نمونه را بنویسید.
۲. مریم، ملیکا و سوگند پول‌هایشان را روی هم گذاشتند و یک رمان درباره دفاع مقدس از نمایشگاه کتاب مدرسه خریدند. سپس، اسامی خود را روی سه کارت متمایز نوشتند و داخل کیسه‌ای انداختند. آنها با هم قرار گذاشتند که یک کارت را به طور تصادفی از کیسه خارج کنند و نام هرکسی که روی آن کارت بود، ابتدا کتاب را به منزل ببرد و مطالعه کند. فضای نمونه این پدیده تصادفی را بنویسید. سپس، تمام زیرمجموعه‌های یک عضوی S را مشخص کنید. اگر قرار باشد دو نفر از آنها بعد از مطالعه کتاب، با هم خلاصه آن را در کلاس ارائه کنند، پیشامدهای ممکن را بنویسید.
۳. تاسی را پرتاب می‌کنیم. اگر پس از نشستن تاس روی زمین، عدد ۲ نمایان شود، به نظر شما در این آزمایش تصادفی کدام یک از پیشامدهای زیر رخ داده‌اند؟

$$A = \{3, 2, 5\}$$

الف)

$$B = \{2\}$$

ب)

$$C = \{2, 4, 6\}$$

(پ)

برای اینکه یک پیشامد رخ دهد، کافی است یکی از برآمدهای آن در آزمایش تصادفی به وقوع پیوندد.

۴. دو تاس را پرتاب می کنیم؛ پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

الف) اعداد رو شده از دو تاس مانند هم باشد.

ب) مجموع اعداد برآمده از دو تاس برابر با ۷ باشد.

پ) مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۱۳ باشد.

ت) حاصل ضرب اعداد برآمده از دو تاس کمتر از ۳۷ باشد.

۵. در یک برنامه کوهنوردی، ۵ دانش آموز سال دهم، ۶ دانش آموز سال یازدهم و ۴ دانش آموز سال دوازدهم شرکت دارند. قرار

است یک گروه پیشتاز ۳ نفره از بین آنها برای صعود انتخاب کنیم. تعداد عضوهای پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

الف) سه نفر دانش آموز پیشتاز از سه پایه مختلف باشند.

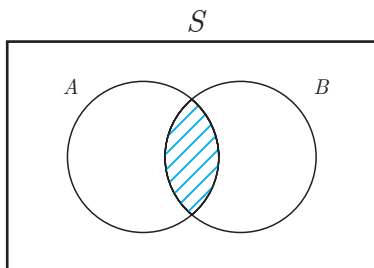
$$n(A) = \binom{5}{1} \times \binom{6}{1} \times \binom{4}{1} = \dots \times \dots \times \dots = 120$$

ب) حداقل ۲ دانش آموز در این گروه پیشتاز از دانش آموزان سال یازدهم باشند.

اعمال روی پیشامدها

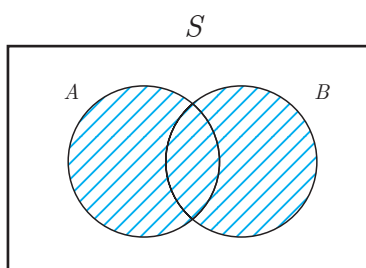
فرض کنیم A و B دو مجموعه باشند؛ اجتماع و اشتراک دو مجموعه A و B ، تفاضل B از A و متمم مجموعه A را به صورت

زیر یادآوری می کنیم.



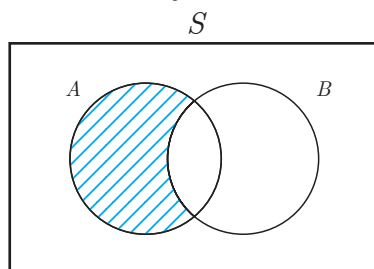
$$A \cap B = \{x \in S \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

(شکل ۱)



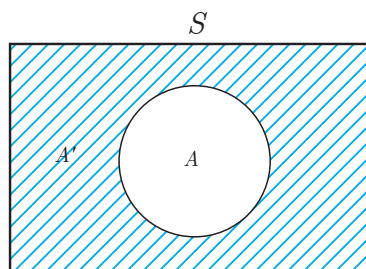
$$A \cup B = \{x \in S \mid x \in A \vee x \in B\}$$

(شکل ۲)



$$A - B = \{x \in S \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

(شکل ۳)



$$A' = \{x \in S \mid x \notin A\}$$

(شکل ۴)

هرگاه A و B دو پیشامد در فضای نمونه S باشند :

الف) پیشامد $A \cap B$ وقتی رخ می دهد که پیشامدهای A و B هر دو رخ دهند. (شکل ۱)

دو تاس را پرتاب می کنیم. پیشامد آن را مشخص کنید؛ طوری که یکی از تاس ها ۵ و مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۶ باشد.

$$A = \{(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 5), (6, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 6)\}$$

یکی از تاس ها ۵ باشد

$$B = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$$

مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۶ باشد

برای مشخص کردن پیشامدی که در آن یکی از تاس ها ۵ و مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۶ باشد، کافی است $A \cap B$ را محاسبه کنیم.

$$A \cap B = \{(1, 5), (5, 1)\}$$

ب) پیشامد $A \cup B$ وقتی رخ می دهد که پیشامدهای A یا B (حداقل یکی از پیشامدها) رخ دهند. (شکل ۲)

دو تاس را پرتاب می کنیم. پیشامد آن را مشخص کنید؛ طوری که دو تاس یکسان یا مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۴ باشد.

$$A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$$

دو تاس یکسان

$$B = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$$

مجموع ۴ باشد

پیشامد مورد نظر برابر با $A \cup B$ است.

$$A \cup B = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (1, 3), (3, 1)\}$$

پ) پیشامد $A - B$ وقتی رخ می دهد که پیشامد A رخ دهد و پیشامد B رخ ندهد. (شکل ۳)

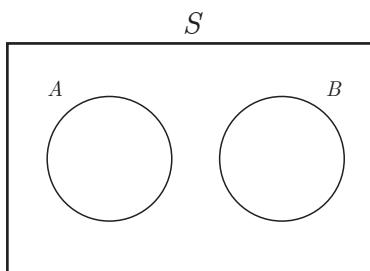
ت) پیشامد A' وقتی رخ می دهد که پیشامد A رخ ندهد. (شکل ۴)

در این حالت A و A' را دو پیشامد متمم می گوئیم و همواره داریم :

$$A \cup A' = S, \quad A \cap A' = \emptyset$$

مثال : هرگاه A و B دو پیشامد ناتهی در فضای نمونه S باشند، به طوری که $A - B = A$ و $B - A = B$ ، در این صورت پیشامد $A \cap B$ را محاسبه کنید.

حل : چون $A - B = A$ و $B - A = B$ و از آنجا که A و B پیشامدهای ناتهی هستند، بنابراین A و B عضو مشترکی ندارند؛ در این حالت $A \cap B = \emptyset$.



هرگاه A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند، به طوری که $A \cap B = \emptyset$ ، در این صورت پیشامدهای A و B را ناسازگار می گوئیم.

برای مثال، در پرتاب یک تاس پیشامدهای زوج آمدن و فرد آمدن، ناسازگارند.

کار در کلاس

۱. تاسی را پرتاب می‌کنیم؛ هر یک از پیشامدهای زیر را با اعضا مشخص کنید.

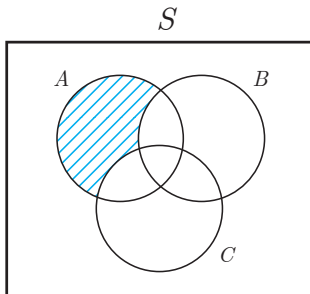
— پیشامد اینکه عدد رو آمده زوج و اول باشد.

— پیشامد اینکه عدد رو آمده زوج یا اول باشد.

— پیشامد اینکه عدد رو آمده زوج باشد ولی اول نباشد.

— پیشامد اینکه عدد رو آمده اول باشد ولی زوج نباشد.

— پیشامد اینکه عدد رو آمده اول نباشد.

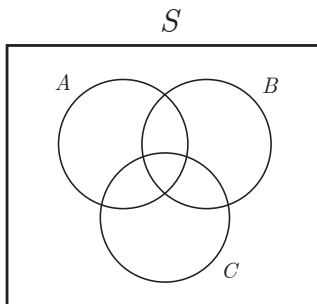


$$A - (B \cup C)$$

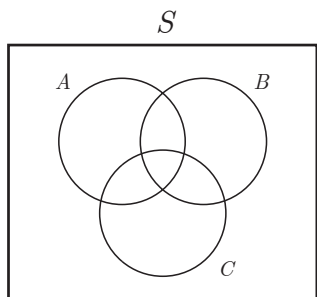
۲. فرض کنید A و B و C سه پیشامد در فضای نمونه S باشند. هر یک از پیشامدهای

زیر را روی نمودار ون سایه بزنید. سپس، عبارت مجموعه‌ای مربوط به هر پیشامد را مانند نمونه بنویسید.

— فقط پیشامد A رخ دهد و پیشامدهای B یا C رخ ندهد.



— پیشامدهای A و B رخ دهند ولی پیشامد C رخ ندهد.



— پیشامدهای A یا B رخ دهند ولی پیشامد C رخ ندهد.

۳. خانواده‌ای صاحب ۳ فرزند است. پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

الف) پیشامد A اینکه همه فرزندان خانواده دارای یک جنسیت باشند.

ب) پیشامد B اینکه دو فرزند خانواده پسر و یک فرزند دختر باشند.

ج) پیشامد C اینکه حداقل دو فرزند این خانواده دختر باشند.

با توجه به پیشامدهای A و B و C به سؤالات زیر پاسخ دهید :

آیا پیشامدهای A و B ناسازگارند؟

آیا پیشامدهای C و B ناسازگارند؟

آیا پیشامدهای C و A ناسازگارند؟

۴. دو پیشامد ناسازگار از یک آزمایش تصادفی را بنویسید.

احتمال یک پیشامد

فرض کنید $S \neq \emptyset$ فضای نمونه متناهی یک پدیده تصادفی باشد. اگر n برآمد برای وقوع داشته باشد و A پیشامدی در S باشد، در این صورت احتمال وقوع پیشامد A را با نماد $P(A)$ نمایش می‌دهیم و مقدار آن را طبق دستور زیر محاسبه می‌کنیم.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

فعالیت

۱. چنان که پیشامد A نشدنی باشد، یعنی $A = \emptyset$ ، در این صورت مقدار $P(A)$ را محاسبه کنید.

۲. در حالتی که پیشامد A حتمی باشد، یعنی $A = S$ ، در این صورت مقدار $P(A)$ را محاسبه کنید.

۳. هرگاه $A \subseteq B$ ، در این صورت جاهای خالی را پر کنید.

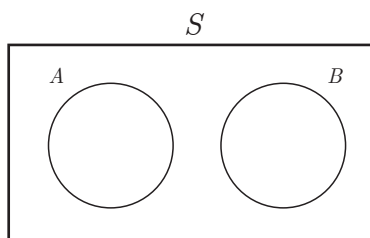
$$A \subseteq B \Rightarrow n(A) \leq \dots \Rightarrow \frac{n(A)}{n(S)} \leq \frac{\dots}{\dots} \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

۴. با توجه به ۱ و ۲ و ۳، اگر A پیشامد دلخواهی در فضای نمونه S باشد، در این صورت داریم :

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

۵. هرگاه A و B دو پیشامد ناسازگار در فضای نمونه S باشند، با پر کردن جاهای خالی مقدار $P(A \cup B)$ را طبق اصل جمع پیدا کنید.

$$n(A \cup B) = n(A) + \dots \Rightarrow \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{\dots}{n(S)} + \dots \Rightarrow P(A \cup B) = \dots + \dots$$



$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

کار در کلاس



۱. یک سکه و یک تاس را با هم پرتاب می‌کنیم؛ مطلوب است محاسبه احتمال اینکه :
الف) تاس زوج بیاید.
می‌دانیم فضای نمونه این آزمایش تصادفی ۱۲ عضو دارد؛
بنابراین، $n(S) = 12$.

$$S = \{(1, r), (2, r), \dots, (6, r), (1, p), (2, p), \dots, (6, p)\}$$

پیشامد اینکه تاس زوج بیاید، برابر است با :

$$A = \{(2, r), (4, r), (6, r), (2, p), (4, p), (6, p)\}; n(A) = 6$$

بنابراین، داریم :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

ب) سکه پشت بیاید.

پ) تاس زوج یا سکه رو بیاید.

ت) تاس فرد و سکه پشت بیاید.



۲. یک تاکسی دارای ۵ سرنشین است؛ مطلوب است محاسبه احتمال اینکه :

الف) هر پنج نفر آنها در ماه فروردین متولد شده باشند.

هر یک از پنج نفر می‌توانند در هر یک از ۱۲ ماه سال به دنیا آمده باشند؛ بنابراین، در محاسبه $n(S)$ به کمک اصل ضرب، هر یک از خانه‌های زیر با ۱۲ حالت پر می‌شوند.

$$\rightarrow n(s) = 12^5 \rightarrow \begin{matrix} 12 \\ \text{نفر اول} \end{matrix} \begin{matrix} 12 \\ \text{نفر دوم} \end{matrix} \begin{matrix} 12 \\ \text{نفر سوم} \end{matrix} \begin{matrix} 12 \\ \text{نفر چهارم} \end{matrix} \begin{matrix} 12 \\ \text{نفر پنجم} \end{matrix}$$

برای محاسبه تعداد اعضای پیشامد A ، به طوری که همه آنها در فروردین متولد شده باشند، کافی است در محاسبه $n(A)$ به کمک اصل ضرب، هر یک از خانه‌های زیر فقط با یک حالت پر شوند.

$$n(A) = 1 \rightarrow \frac{1}{\text{نفر اول}} \cdot \frac{1}{\text{نفر دوم}} \cdot \frac{1}{\text{نفر سوم}} \cdot \frac{1}{\text{نفر چهارم}} \cdot \frac{1}{\text{نفر پنجم}} \rightarrow \text{تعداد انتخاب‌ها}$$

در نتیجه داریم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{125}$$

(ب) هر پنج نفر آنها در یک ماه از سال متولد شده باشند.

(پ) تولد هیچ دو تای آنها در یک ماه نباشد.

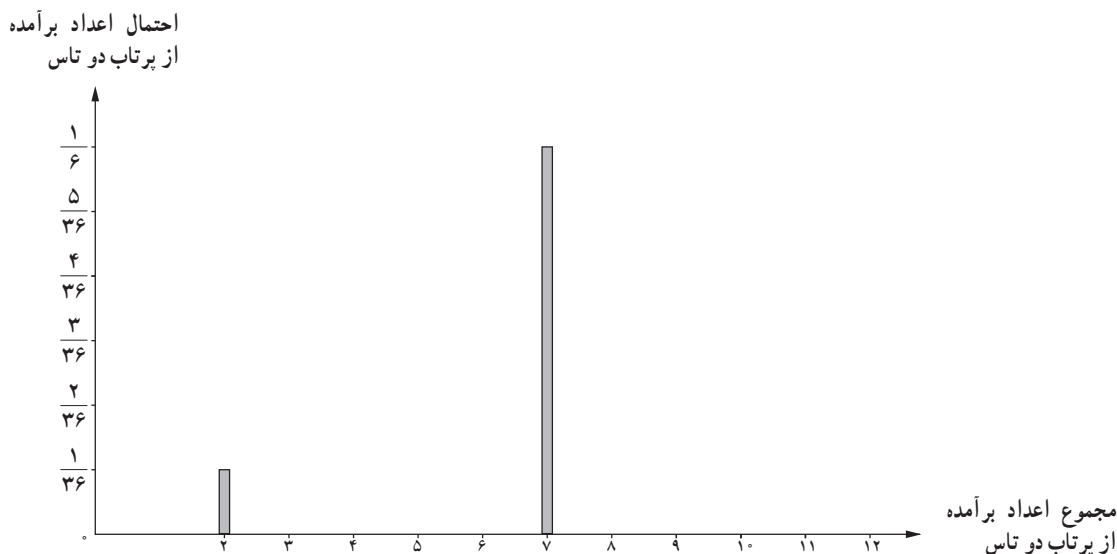
۳. در یک بازی ۱۱ نفره، به هر شخصی یکی از شماره‌های ۲، ۳، ۴، ... و ۱۲ را نسبت می‌دهیم. سپس با پرتاب دو تاس و مجموع اعداد برآمده از آنها، نفر برنده مشخص می‌شود.

الف) احتمال برنده شدن چه شماره‌ای نسبت به بقیه بیشتر است؟

(ب) احتمال برنده شدن کدام شماره‌ها از همه کمتر است؟

(پ) آیا کسی که احتمال برنده شدنش کمتر است، ممکن است در این مسابقه برنده شود؟ چرا؟

ت) در شکل زیر دستگاه مختصاتی رسم شده و روی محور افقی، مجموع اعداد برآمده از دو تاس و روی محور عمودی، احتمال متناظر با هر یک از آنها نوشته شده است. نمودار میله‌ای زیر را کامل کنید.

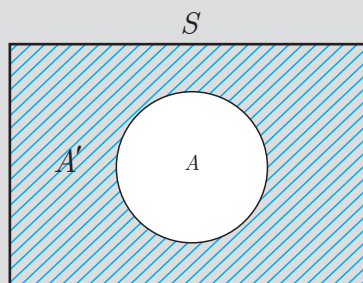


فعالیت

- در جعبه‌ای ۳ مداد و ۵ خودکار وجود دارد. از این جعبه به‌طور تصادفی یک شیء خارج می‌کنیم. مطلوب است محاسبه:
- الف) احتمال این را بیابید که شیء انتخابی مداد باشد؛ $P(A)$.
- ب) احتمال این را بیابید که شیء انتخابی خودکار باشد؛ $P(B)$.
- پ) احتمال این را بیابید که شیء انتخاب شده مداد نباشد؛ $P(A')$.
- ت) پاسخ‌های قسمت‌های ب و پ را با هم مقایسه کنید؛ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟
- ث) حاصل $P(A) + P(A')$ را پیدا کنید.



اگر $P(A)$ احتمال وقوع پیشامد A در فضای نمونه S باشد، در این صورت، احتمال واقع نشدن آن پیشامد را با $P(A')$ نمایش می‌دهیم و داریم: $P(A) + P(A') = 1$ یا $P(A') = 1 - P(A)$. در این حالت، A و A' را دو پیشامد متمم می‌گوییم.



کار در کلاس

۱. احتمال اینکه فردا بارانی باشد برابر با $\frac{1}{3}$ است. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه فردا بارانی نباشد.
۲. احتمال اینکه کیارش فردا به مدرسه نرود برابر با 10% است. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه فردا کیارش به مدرسه برود.
۳. احتمال اینکه ریحانه امشب سریال شبکه یک سیما را تماشا نکند برابر با $\frac{32}{49}$ است، مطلوب است محاسبه احتمال اینکه ریحانه امشب سریال را تماشا کند.

مثال: در یک فروشگاه ورزشی تعدادی پیراهن ورزشی شامل ۴ پیراهن قرمز، ۴ پیراهن آبی و ۲ پیراهن زرد در یک رخت‌آویز قرار دارند. شخصی درخواست می‌کند که فروشنده به‌طور تصادفی ۳ پیراهن انتخاب کند و برای او بفرستد.

الف) احتمال این را که ۳ پیراهن از یک رنگ باشند، محاسبه کنید.

ب) احتمال این را که رنگ ۳ پیراهن متفاوت باشد، محاسبه کنید.

پ) احتمال این را که حداقل ۲ پیراهن قرمز باشند، محاسبه کنید.

ت) احتمال این را که حداکثر ۲ پیراهن آبی باشند، محاسبه کنید.

ث) احتمال این را که رنگ ۳ پیراهن آبی نباشد، محاسبه کنید.

ج) جواب‌های قسمت‌های ت و ث را مقایسه کنید؛ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

حل: الف) چون قرار است ۳ پیراهن از بین ۱۰ پیراهن انتخاب شود، بنابراین داریم:

$$n(S) = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \times 7!} = 120$$

چنانچه هر سه پیراهن یک رنگ باشند، آن‌گاه هر سه قرمز یا هر سه آبی هستند؛ بنابراین، اگر A پیشامد هر سه قرمز و B پیشامد هر سه آبی باشند، در این صورت می‌خواهیم $P(A \cup B)$ را محاسبه کنیم. از آنجا که A و B ناسازگاراند، داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{\binom{4}{3}}{120} + \frac{\binom{4}{3}}{120} = \frac{8}{120} = \frac{1}{15}$$

ب) برای اینکه رنگ سه پیراهن متفاوت باشد، آن‌گاه یک پیراهن قرمز، یک پیراهن آبی و یک پیراهن زرد است؛ بنابراین، داریم:

$$n(C) = \binom{4}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{2}{1} = 4 \times 4 \times 2 = 32 \quad ; \quad P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{32}{120} = \frac{4}{15}$$

پ) برای اینکه حداقل ۲ پیراهن قرمز باشند، آن گاه ۲ پیراهن قرمز یا ۳ پیراهن قرمزند؛ بنابراین، مشابه با قسمت «الف» خواهیم داشت :

$$n(D) = \overset{\text{پیراهن های قرمز}}{\binom{4}{2}} \times \overset{\text{قرمز غیر قرمز}}{\binom{6}{1}} + \binom{4}{3} = 6 \times 6 + 4 = 40 \quad ; \quad P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}$$

ت) برای اینکه حداکثر دو پیراهن آبی باشند، باید دو پیراهن آبی یا یک پیراهن آبی و یا صفر پیراهن آبی داشته باشیم :

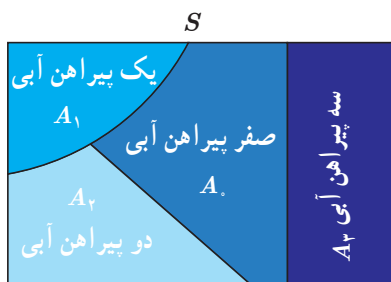
$$n(E) = \overset{\text{غیر آبی}}{\binom{4}{2}} \times \overset{\text{غیر آبی}}{\binom{6}{1}} + \overset{\text{غیر آبی}}{\binom{4}{1}} \times \overset{\text{آبی}}{\binom{6}{2}} + \overset{\text{آبی}}{\binom{4}{0}} \times \overset{\text{غیر آبی}}{\binom{6}{3}} = 6 \times 6 + 4 \times 15 + 1 \times 20 = 116$$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{116}{120} = \frac{29}{30}$$

ث) اگر $P(F)$ احتمال ۳ پیراهن آبی باشد، آن گاه $P(F') = 1 - P(F)$ احتمال این است که ۳ پیراهن آبی نباشند؛ بنابراین :

$$P(F') = 1 - P(F) = 1 - \frac{\overset{\text{آبی}}{\binom{4}{3}}}{\binom{10}{3}} = 1 - \frac{4}{120} = \frac{116}{120} = \frac{29}{30}$$

ج) قسمت های «ت» و «ث» یکسان اند. یعنی می توان راه حل قسمت «ث» را برای قسمت «ت» به کار برد. چنانچه در انتخاب ۳ پیراهن به دنبال تعداد پیراهن های آبی باشیم، پیشامدهای ممکن روی فضای نمونه به صورت زیر است.



$$P(A_4 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_4) + P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = P(S) = 1$$

تمرین

۱. کدام یک از پدیده‌های زیر آزمایش تصادفی و کدام یک آزمایش قطعی است؟
 الف) نام ۲۰ دانش‌آموز را روی ۲۰ کارت می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها، به طور تصادفی یک کارت بیرون می‌کشیم تا نام یکی از دانش‌آموزها استخراج شود.

ب) مقداری آب را حرارت می‌دهیم تا به بخار تبدیل شود.

پ) نتیجه یک آزمون چهارجوابی، که نیمی از سؤالات آن را شانس پاسخ داده‌ایم.

ت) در یک بازی ساده دو نفره، یکی از دو نفر مراحل زیر را انجام می‌دهد.

– عددی را انتخاب می‌کند.

– سه واحد به آن عدد می‌افزاید.

– سپس حاصل را دو برابر می‌کند.

– از عدد حاصل ۲ واحد کم می‌کند.

– نتیجه به دست آمده را نصف می‌کند.

– از حاصل به دست آمده، عدد اولیه را کم می‌کند.

– در مرحله آخر، فرد دوم به جای شخص محاسبه‌کننده پاسخ را اعلام می‌کند.

۲. سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر رو ظاهر شد، آن گاه تاس را می‌ریزیم. در غیر این صورت، یک بار دیگر سکه را می‌اندازیم.

الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.

ب) پیشامد A را که در آن عدد ظاهر شده روی تاس زوج باشد یا سکه پشت بیاید، با اعضا مشخص کنید.

۳. هر یک از اعداد فرد طبیعی کوچک‌تر از ۲۰ را روی یک کارت می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها به طور تصادفی

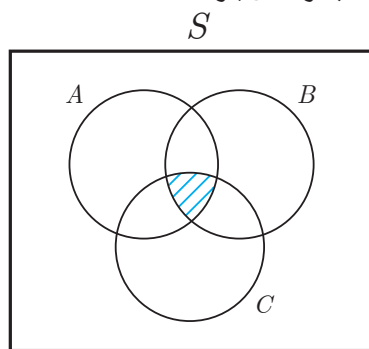
یک کارت را برمی‌داریم؛ مطلوب است تعیین:

الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی

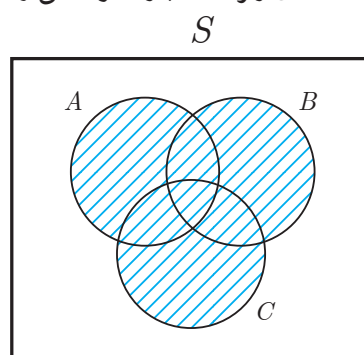
ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضرب ۳ باشد.

پ) پیشامد B که در آن عدد روی کارت، مجذور کامل باشد. ت) پیشامدهای $A \cap B$ و $A - B$ را با اعضا مشخص کنید.

۴. برای هر یک از پیشامدهای زیر یک عبارت توصیفی و یک عبارت مجموعه‌ای بنویسید.



(الف)



(ب)

۵. هر یک از اعداد دو رقمی را که با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ می توان نوشت، روی کارت هایی می نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت ها یک کارت را به طور تصادفی خارج می کنیم. الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.

ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضرب ۶ باشد. پ) پیشامد B که در آن عدد روی کارت اول باشد.

۶. خانواده ای دارای ۳ فرزند است.

الف) فضای نمونه مناسب برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده چیست؟

ب) پیشامد A که در آن هر سه فرزند از یک جنس باشند. پ) پیشامد B که در آن فقط یک فرزند دختر باشد.

ت) پیشامد C که در آن حداقل ۲ فرزند پسر باشند. ث) پیشامد D که در آن حداکثر یک فرزند پسر باشد.

۷. خانواده ای دارای ۴ فرزند است.

الف) فضای نمونه مناسب برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده چند عضو دارد؟

ب) پیشامد A را مشخص کنید؛ طوری که در آن دو فرزند سوم و چهارم دختر باشند.

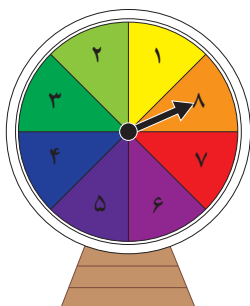
پ) پیشامد C که در آن تعداد فرزندان دختر بیشتر از تعداد فرزندان پسر باشد. ت) آیا پیشامدهای A و C ناسازگارند؟

۸. از جعبه ای که شامل ۱۲ سیب سالم و ۵ سیب لکه دار است، ۳ سیب را به طور تصادفی برمی داریم. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه:

الف) هر سه سیب سالم باشند. ب) دو سیب سالم و یک سیب لکه دار باشد.

پ) تعداد سیب های سالم از تعداد سیب های لکه دار بیشتر باشد.

۹. عقربه دستگاه چرخنده زیر، پس از به حرکت درآمدن روی یکی از ۸ ناحیه می ایستد و عددی را نشان می دهد. چقدر احتمال دارد که:



الف) عقربه روی یک عدد اول بایستد.

ب) عقربه یک عدد اول یا فرد را نشان دهد.

پ) عقربه روی یک عدد مضرب ۳ بایستد.

۱۰. ۷ پرچم مختلف را به هفت میله پرچم نصب کرده ایم و روی میله ها شماره های ۱ تا ۷ را حک کرده ایم. چنانچه این پرچم ها به طور تصادفی در یک ردیف کنار هم قرار گیرند، مطلوب است محاسبه احتمال اینکه میله پرچم های با شماره های اول در جایگاه مطابق با شماره خود باشند.

۱۱. یازده بازیکن فوتبال تیم مدرسه شما به طور تصادفی کنار یکدیگر قرار می گیرند تا عکسی یادگاری بپندازند. چنانچه دروازه بان و کاپیتان تیم دو نفر متفاوت باشند، مطلوب است محاسبه احتمال اینکه در عکس دقیقاً ۴ نفر بین دروازه بان و کاپیتان حضور داشته باشند؟

۱۲. در یک پارک جنگلی حفاظت شده، ۲۰ قوچ وحشی البرز مرکزی وجود دارد؛ ۵ تا از آنها را می گیرند و پس از نشان دار کردن، رهایشان می کنند. بعد از مدتی، محیط بانان به طور تصادفی ۷ تا از آنها را می گیرند و می خواهند تعداد قوچ های نشان دار را بشمارند. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه حداکثر ۲ قوچ نشانه دار باشند.

۱۳. انجمن اولیا و مربیان یک دبیرستان ۱۰ نفر عضو دارد. به یک برنامه خاص، ۵ نفر رأی موافق، ۳ نفر رأی مخالف و ۲ نفر رأی ممتنع داده اند. از بین آنها به طور تصادفی ۳ نفر انتخاب می کنیم. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه:

الف) حداقل ۲ نفر از افراد انتخابی موافق برنامه باشند.

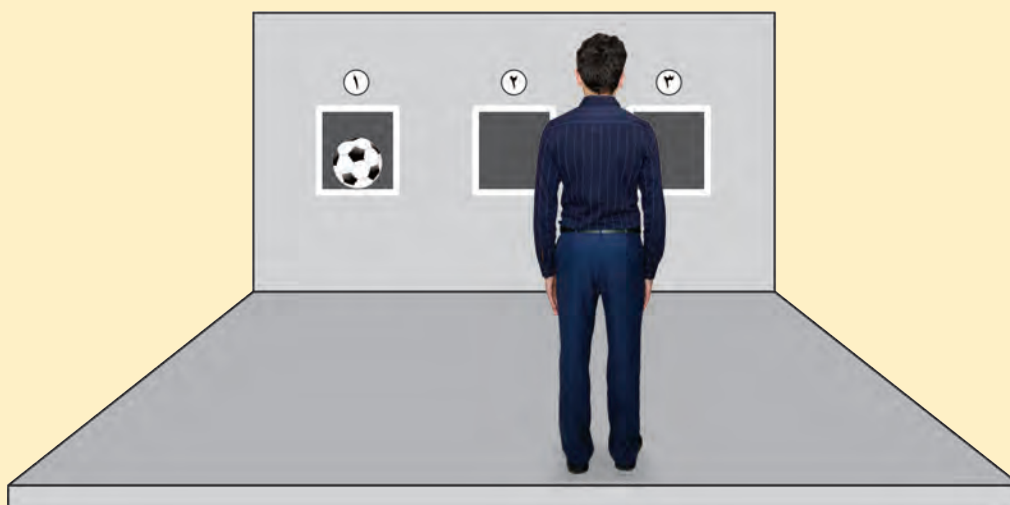
ب) نظر هیچ دو نفری از آنها مانند هم نباشد.

خواندنی

در یک مسابقه، سه دریچه مطابق شکل زیر در مقابل یک شرکت کننده قرار دارد. ناگهان یک دریچه به طور تصادفی باز می شود و تویی از آن به طرف شرکت کننده پرتاب می شود. اگر این فرد بتواند توپ را بگیرد، برنده است و در غیر این صورت، بازنده می شود.

به نظر شما، احتمال پرتاب توپ از هر دریچه چقدر است؟

اگر یک دریچه را غیرفعال کنند و شرکت کننده شماره دریچه غیرفعال را نداند، در این صورت احتمال پرتاب توپ از هر دریچه برای شرکت کننده در مسابقه چقدر است؟



درس ۳

چرخه آمار در حل مسائل

دنایای امروز پر از اطلاعاتی است که ما در بخش‌های مختلف زندگی با آنها روبه‌رو می‌شویم. بنابراین، برای اینکه بتوانیم بهتر زندگی کنیم و درباره مسائل مختلف بهتر تصمیم بگیریم، لازم است بتوانیم این اطلاعات را به خوبی درک و تحلیل کنیم. درک صحیح معیارها، نمودارها، اصطلاحات و مفاهیم آماری به ما کمک می‌کند که تفسیر درستی از این اطلاعات داشته باشیم، محدودیت‌های نتایج به‌دست آمده را بشناسیم و در نهایت، با استدلالی درست، بهتر تصمیم بگیریم. در این درس می‌خواهیم از شکل‌گیری یک مسئله در محیط زندگی مان تا یافتن پاسخی برای آن، از آمار استفاده کنیم و آماری فکر کردن را تمرین کنیم.

فعالیت

❓ دانش‌آموزان یک مدرسه، روزانه زمان زیادی را به استفاده از تلفن‌های هوشمند اختصاص می‌دادند. مشاوران آموزشی مدرسه تصمیم گرفتند دسترسی دانش‌آموزان به تلفن‌های هوشمند را در جهت اهداف آموزشی مدرسه هدفمند کنند اما از میزان و چگونگی استفاده دانش‌آموزان از تلفن‌های هوشمند اطلاع دقیقی نداشتند و بنابراین، برنامه‌ریزی برای این هدف ممکن نبود. پس، قبل از هر چیز مسئله مشاوران آموزشی این بود که بفهمند: «دانش‌آموزان پایه‌های دهم، یازدهم و دوازدهم این مدرسه به‌طور متوسط روزانه چه مدت و برای چه فعالیت‌هایی از تلفن‌های هوشمند خود استفاده می‌کنند؟»

🔧 گروه اجراکننده این پروژه، پرسش‌نامه‌ای طراحی کردند و با انتخاب تصادفی ۲۰ نفر از هر پایه، از این نمونه از دانش‌آموزان خواستند که این پرسش‌نامه را تکمیل کنند:

- الف) به‌طور متوسط، روزانه چند دقیقه از تلفن هوشمند خود استفاده می‌کنید؟
ب) از میان گزینه‌های زیر سه فعالیتی را که بیش از دیگر گزینه‌ها با تلفن هوشمند خود انجام می‌دهید، علامت بزنید.
- ☐ خواندن کتاب الکترونیک ☐ شبکه‌های اجتماعی ☐ عکاسی ☐ بازی ☐ تماس تلفنی
 - ☐ تماشای فیلم یا گوش دادن به موسیقی

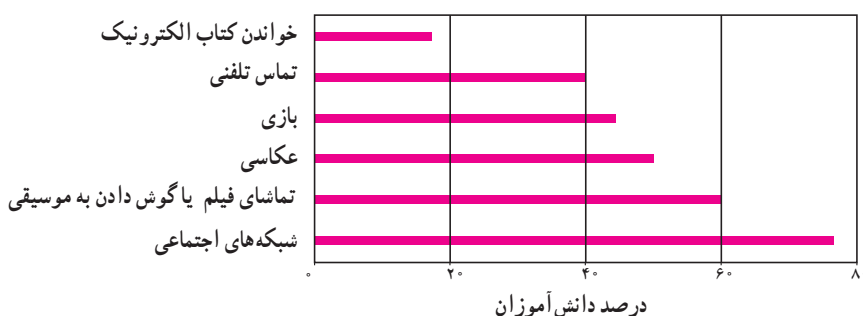
مشاوران مدرسه تصمیم داشتند با توجه به کمی بودن میزان استفاده از تلفن هوشمند، نتایج آن را به صورت میانه و دامنه میان چارکی^۱ گزارش کنند و درصد فراوانی هر یک از فعالیت‌ها را به صورت نمودار میله‌ای نمایش دهند.

● حدس می‌زنید دانش‌آموزان کلاس شما به طور متوسط روزانه چقدر و برای چه فعالیت‌هایی از تلفن‌های هوشمند خود استفاده می‌کنند؟

داده‌ها پس از گردآوری در نرم‌افزار وارد شدند. اشتباه‌های تایپی تا حد ممکن رفع و درستی داده‌های دورافتاده بررسی شد. پرسش‌نامه‌هایی که اطلاعات آنها اشتباه به نظر می‌رسید (مثلاً میزان استفاده از تلفن هوشمند بیش از ۲۴ ساعت در روز بود!) کنار گذاشته شدند.

● در این پرسشنامه لازم نیست افراد نام خود را بنویسند. حفظ محرمانگی اطلاعات، چگونه کمک می‌کند داده‌های گردآوری شده به واقعیت نزدیک‌تر باشند؟ مثال دیگری بزنید که حفظ محرمانگی اطلاعات هنگام گردآوری داده‌ها مهم باشند.

نتایج این نظرسنجی درباره فعالیت‌های انجام شده با تلفن هوشمند به صورت نمودار میله‌ای زیر گزارش شد. در نمونه مورد بررسی، میانه میزان استفاده از تلفن هوشمند ۷۰ دقیقه و دامنه میان چارکی آن $(Q_3 = 100, Q_1 = 65)$ دقیقه بود.



● با توجه به چارک‌های گزارش شده، (تقریباً) چند درصد از دانش‌آموزان به طور متوسط بیش از ۱۰۰ دقیقه در روز با تلفن هوشمند خود کار می‌کنند؟

● چرا در این نمودار میله‌ای، مجموع درصد فراوانی‌ها از ۱۰۰ بیشتر می‌شود؟

۱- پس از مرتب کردن داده‌ها، مقداری را که تعداد داده‌های بعد از آن با تعداد داده‌های قبل از آن برابر است، میانه می‌نامیم. در داده‌های مرتب شده، میانه داده‌های قبل از چارک اول (Q_1) و میانه داده‌های بعد از چارک سوم (Q_3) می‌نامیم. دامنه میان چارکی حاصل تفاضل چارک سوم و اول است که آن را با IQR (Interquartile Range) نمایش می‌دهیم.

💡 باید توجه داشته باشیم که این نتایج فقط در مورد دانش‌آموزان پایه‌های این مدرسه (نه دانش‌آموزان دیگر مدارس) و فقط در مورد چگونگی استفاده از (نه ابزارهای دیگر) صادق است^۱.

● با توجه به نمودار میله‌ای صفحه پیش، دانش‌آموزان متوسطه دوم این مدرسه بیشتر برای انجام دادن چه فعالیت‌هایی از تلفن هوشمند خود استفاده می‌کنند؟

● از میانه و دامنه میان چارکی گزارش شده برای زمان استفاده روزانه از تلفن‌های هوشمند چه نتیجه‌ای می‌گیرید یا به زبان آماری، آنها را چگونه تفسیر می‌کنید؟

❖ مشاوران آموزشی، به کمک دانش‌آموزان و اولیا با بررسی نتایج و فعالیت‌هایی که بیشترین فراوانی را داشتند و با در نظر گرفتن ویژگی‌های دانش‌آموزان مدرسه به این نتیجه رسیدند که (۱) تشکیل یک گروه آموزشی در یکی از شبکه‌های اجتماعی می‌تواند عملکرد تحصیلی و ارتباط عاطفی معلم‌ها و دانش‌آموزان را بهبود بخشد؛ (۲) معلم‌ها می‌توانند با تهیه فیلم‌های آموزشی جذاب،



محتوای درسی را به صورت فیلم در اختیار دانش‌آموزان قرار دهند و دانش‌آموزان در ساعاتی از شبانه‌روز که آمادگی بیشتری دارند، فیلم‌ها را تماشا کنند و پرسش‌هایشان را در کلاس به صورت حضوری با معلم‌ها در میان بگذارند؛ (۳) با برگزاری دوره‌های آموزشی و نمایشگاه‌هایی از آثار دانش‌آموزان، می‌توان علاقه دانش‌آموزان به عکاسی و در نتیجه، استفاده از تلفن‌های هوشمند را هدفمند کرد.

؟ اکنون که مطلع شدیم دانش‌آموزان در طول روز به طور متوسط چه مقدار با تلفن‌هایشان کار می‌کنند و به چه فعالیت‌هایی مشغول هستند، می‌خواهیم برنامه‌ای داشته باشیم که با استفاده از آن عملکرد تحصیلی دانش‌آموزان بهتر شود. بدین منظور باید در یک نظرسنجی دیگر، مدت زمانی را که دانش‌آموزان صرف کارهای مختلف می‌کنند، به تفکیک این فعالیت‌ها بدانیم. همان‌طور که در فعالیت بالا دیدید، حل کردن مسئله‌های مرتبط با آمار به صورت چرخه‌ای کامل شامل گام‌های: ۱. بیان مسئله، ۲. طرح و برنامه‌ریزی، ۳. گردآوری و پاک‌سازی داده‌ها، ۴. تحلیل داده‌ها و ۵. بحث و نتیجه‌گیری است.



۱- هنگامی که بر اساس داده‌های یک نمونه آماری، برای جامعه آماری مرتبط با آن نتیجه‌گیری می‌کنیم، به اصطلاح می‌گوییم نتایج را تعمیم داده‌ایم.

کار در کلاس

اکنون که چرخه حل مسئله را می‌شناسیم، می‌توانیم در جدول زیر نام هر گام و ترتیب آن را مقابل توضیحاتش بنویسیم. (مشاهده نمونه حل‌شده در سطر سوم می‌تواند به ما کمک کند.)

ترتیب گام	نام گام	توضیح گام
		راهی برای رسیدن به پاسخ مسئله پیدا می‌کنیم. به نمونه‌گیری، شیوه اندازه‌گیری متغیر و چگونگی توصیف نتایج می‌اندیشیم.
		نتایج به‌دست‌آمده را تفسیر می‌کنیم و پاسخی برای پرسش اصلی پیدا می‌کنیم.
۱	بیان مسئله	مسئله‌ای را که در دنیای واقعی وجود دارد به‌صورت یک مسئله شفاف و دقیق آماری مطرح می‌کنیم.
		با استفاده از معیارها، نمودارها و مفاهیمی که آموخته‌ایم، نتایج را متناسب با هدف‌های کارمان، نوع متغیرها و ویژگی‌های داده‌ها گزارش می‌کنیم.
		داده‌ها را گردآوری می‌کنیم و تا حد ممکن از درستی آنها مطمئن می‌شویم.

گام‌های چرخه آمار در حل مسائل

پیش از هر چیز خوب است بدانیم «چرا فرایند حل مسئله را «چرخه» می‌نامیم». همان‌طور که در مثال «استفاده از تلفن هوشمند» دیدیم، گام‌های مختلف حل مسئله به ما کمک می‌کنند که برای پرسش اصلی پاسخی پیدا کنیم، اما اغلب پس از اجرای تمامی گام‌ها با روشن‌تر شدن ابعاد مختلف مسئله و براساس نتایج و تجربه به‌دست آمده، یک مسئله جدید دقیق‌تر شکل می‌گیرد. در واقع، برای پیدا کردن پاسخ پرسش اصلی تا رسیدن به یک جمع‌بندی منطقی، یک مسئله چندین بار بازبینی می‌شود. در این بخش، گام‌های چرخه حل مسئله را بیشتر بررسی می‌کنیم.

؟ گام ۱ (بیان مسئله)

طرح یک پرسش دقیق و شفاف مهم‌ترین گام رسیدن به پاسخ است. بنابراین، پیش از هر چیز باید مسئله به درستی درک شود و سپس به‌طور دقیق تعریف و بیان گردد؛ یعنی با توجه به اهداف، بودجه، زمان و دیگر شرایط موجود، جامعه آماری را محدود، و هدف مطالعه را مشخص کنیم.



مثال: فرض کنید می‌خواهیم میزان فعالیت بدنی پسران کرمانشاه را بدانیم و برای آن برنامه‌ای داشته باشیم. پیش از هر چیز باید بتوانیم مسئله را دقیق تعریف کنیم. پس از مشورت با کارشناسان این حوزه متوجه می‌شویم که با توجه به عواملی مانند سن، محل سکونت (از نظر نزدیکی به مکان‌های ورزشی)، الگوهای فرهنگی فعالیت بدنی (مانند ارزشمندی ورزش‌های پهلوانی و...) یا توانایی‌ها و ناتوانی‌های

جسمانی، میزان فعالیت بدنی این افراد بسیار متفاوت است؛ پس، بدون محدود کردن جامعه آماری نمی‌توانیم پاسخ مشخصی برای این مسئله داشته باشیم.

بدین ترتیب، مثلاً «بررسی متوسط فعالیت بدنی هفتگی در هوای آزاد در میان پسران ۱۳ تا ۱۵ ساله یک مدرسه مشخص در کرمانشاه» می‌تواند به عنوان یک مسئله مطرح شود. چند مثال دیگر بزنید.

بحث و گفت‌وگو

هر یک از عوامل نام برده، (سن، محل سکونت و...) چگونه می‌تواند بر فعالیت بدنی جامعه آماری مورد بررسی تأثیر بگذارد؟ چه عوامل دیگری به تعریف دقیق مسئله کمک می‌کند؟ گروه اجرا کننده این مطالعه باید شامل چه متخصصانی باشد و دانش هر یک چه نقشی در این مطالعه دارد؟ (مثلاً متخصصان تربیت بدنی چگونه می‌توانند به اندازه‌گیری متغیر «فعالیت بدنی» کمک کنند؟)

گام ۲ (طرح و برنامه‌ریزی)

اندازه‌گیری یا سنجش، اولین قدم برای یافتن داده‌ها و بررسی متغیر مورد نظر است. در اندازه‌گیری، در واقع سعی می‌کنیم اطلاعات توصیفی (کیفی) را تا حد ممکن به اطلاعات کمی (عددی) تبدیل کنیم. انتخاب معیار اندازه‌گیری مناسب برای متغیرهایی مانند قد، وزن و دما آسان است؛ زیرا با ابزارهایی آشنا می‌توانیم توصیف‌هایی مانند قد بلند، وزن مناسب یا هوای گرم را به کمیتی قابل فهم برای همه تبدیل کنیم. البته اندازه‌گیری همیشه این قدر هم آسان نیست. فرض کنید در مطالعه‌ای می‌خواهیم میزان «خوشحالی» افراد را اندازه‌گیری کنیم. چه پرسش‌هایی می‌تواند برای اندازه‌گیری این متغیر به ما کمک کند؟ آیا اندازه‌گیری دارایی‌ها، تحصیلات، دستاوردها، تعداد دوستان و... لزوماً مشخص می‌کند که هر فرد چقدر خوشحال است؟ احتمالاً این طور نیست. با توجه به اهمیت اندازه‌گیری می‌توانیم بفهمیم که حضور افراد متخصص در گروه هدایت‌کننده پژوهش چقدر مهم است. متخصصان، ابزارهای اندازه‌گیری یا پرسش‌نامه‌ها را طوری طراحی می‌کنند که با آنها بتوانیم همان متغیری را که مورد نظر است، اندازه بگیریم. بدون مشورت با این افراد، ممکن است به جای «خوشحالی» مثلاً «رفاه» یا به جای «هوش» مثلاً «حافظه» اندازه‌گیری شود.

در مرحله طرح و برنامه‌ریزی علاوه بر توافق درباره چگونگی اندازه‌گیری متغیرهای مورد نظر، درباره اندازه نمونه، چگونگی نمونه‌گیری و همچنین شیوه تحلیل داده‌ها تصمیم‌گیری می‌شود.



تعداد اعضای جامعه را اندازه جامعه و تعداد اعضای نمونه را اندازه نمونه می‌نامیم. هرچه پراکندگی متغیر مورد بررسی در جامعه بیشتر باشد، برای حصول اطمینان از وجود تنوع در نمونه، به اندازه نمونه بزرگ‌تری نیاز داریم.

کار در کلاس

۱. برای بررسی کدام یک از موارد زیر به اندازه نمونه بزرگتری نیاز است؟ توضیح دهید.

□ سن دانش‌آموزان در کلاسی که در آن درس می‌خوانید.

□ معدل سال گذشته دانش‌آموزان در کلاسی که در آن درس می‌خوانید.

۲. علی و امید در یک پروژه دانش‌آموزی می‌خواهند بررسی کنند که «نوجوانان منطقه ۲ آبادان در اوقات فراغت خود به چه فعالیت‌هایی مشغول‌اند و برای هر فعالیت چقدر وقت صرف می‌کنند.»

علی پیشنهاد می‌کند: «برای نمونه‌گیری به چند مکان تفریحی، فرهنگی، مذهبی و ورزشی برویم و در هر مکان چند نوجوان را به‌طور تصادفی انتخاب کنیم و از آنها پرسیم به‌طور متوسط چند ساعت در هفته به این مکان می‌آیند.»

امید پیشنهاد می‌کند: «اگر اداره آموزش و پرورش منطقه موافقت کند، برای نمونه‌گیری فهرستی از دانش‌آموزان متوسطه اول و دوم منطقه ۲ آبادان تهیه کنیم. بعد، با اندازه نمونه کافی افرادی را به‌طور تصادفی انتخاب کنیم و از هر دانش‌آموز پرسیم در اوقات فراغت خود چه فعالیت‌هایی انجام می‌دهد و به‌صورت متوسط چند ساعت در هفته به این فعالیت‌ها مشغول است.»



موارد زیر اشکالاتی است که در پیشنهادها امید و علی وجود دارد. در هر مورد، بنویسید که اشکال مربوط به پیشنهاد علی است یا امید.

الف) کسانی که اوقات فراغتشان را در خانه می‌گذرانند، شانس حضور در نمونه را ندارند.

ب) نوجوانان بازمانده از تحصیل، شانس حضور در نمونه را ندارند.



پ) اگر مثلاً به کتابخانه برویم و از نوجوانان پرسیم به‌طور متوسط چند ساعت در هفته به این مکان می‌آیند، میانگین داده‌های به‌دست‌آمده (آماره نمونه) بزرگ‌تر از میانگین آن در جامعه آماری (پارامتر جامعه) می‌شود؛ چون نوجوانانی که اصلاً به کتابخانه نمی‌روند، در نظر گرفته نشده‌اند. دو اشکال دیگر را که به نمونه‌گیری علی وارد است، مطرح کنید.

۳. برای بررسی وضعیت اجتماعی - اقتصادی خانوارهای یک شهر در کدام یک از شیوه‌های نمونه‌گیری زیر، همه قشرهای جامعه شانس حضور ندارند؟ چرا؟

الف) انتخاب تصادفی خانوارها براساس رقم اول تلفن خانه‌ها

ب) انتخاب تصادفی خانوارها براساس رقم آخر تلفن خانه‌ها.

گام ۳ (گردآوری و پاک‌سازی داده‌ها)



در هر مطالعه ممکن است در مرحله اندازه‌گیری، گردآوری یا ثبت داده‌ها و یا وارد کردن داده‌ها در نرم‌افزار اشتباهی رخ دهد. با بررسی دقیق داده‌ها می‌توان برخی از این اشتباه‌ها را تصحیح کرد.

گام ۴ (تحلیل داده‌ها)

در این مرحله، داده‌ها را تحلیل می‌کنیم و نتایج را ارائه می‌دهیم. منظور از تحلیل داده‌ها در واقع صرفاً گزارش معیارها و ارائه نمودارها و دیگر نتایج آماری است. تفسیر این نتایج و نتیجه‌گیری از آنها در گام بعد انجام خواهد شد.

یادآوری: همان‌طور که می‌دانید، برای توصیف داده‌های کمی باید هم معیار گرایش به مرکز و هم معیار پراکندگی گزارش شود. معیارهای گرایش به مرکز مانند میانگین و میانه به ما کمک می‌کنند بدانیم داده‌ها در کجا متمرکزند و معیارهای پراکندگی به ما کمک می‌کنند بدانیم داده‌ها چگونه متمرکز یا پراکنده شده‌اند. به یاد دارید که اگر داده دورافتاده داشته باشیم، میانگین و انحراف معیار، معیارهای مناسبی برای توصیف داده‌ها نخواهند بود و باید از میانه و دامنه‌های میان چارکی استفاده کنیم. چرا؟

مثال:

با توجه به داده‌ها جدول زیر کامل شده است.

متغیر	داده‌ها	معیارهای گرایش به مرکز		معیارهای پراکندگی		
		$\bar{x}$	$\bar{y}$	IQR	SD (s)	$\frac{b-a}{2}$
سن (سال)	۱۷ ۱۸ ۱۶ ۱۷ ۱۵ ۱۹ ۱۵ ۱۶ ۱۷ ۱۸ ۱۵ ۱۹	۱۶/۸۳	۱۷	۱۸-۱۵/۵=۲/۵	۱/۳۴	۱۹-۱۵=۴
میزان تماشای تلویزیون	۴ ۲۹ ۴ ۶ ۷ ۶/۵ ۷ ۸ ۶ ۳۰ ۴ ۵	۹/۷۱	۶/۲۵	۷/۵-۴/۵=۳	۸/۵۵	۳۰-۴=۲۶

راهنمای جدول: میزان تماشای تلویزیون: متوسط ساعت‌های تماشای تلویزیون در هفته؛ IQR^* : دامنه میان چارکی؛ SD^{**} : انحراف معیار.

با توجه به جدول بالا، به پرسش‌های زیر پاسخ دهید:

الف) کدام معیار گرایش به مرکز و کدام معیار پراکندگی برای توصیف داده‌های متغیر «سن» مناسب‌اند؟ چرا؟

با توجه به توزیع داده‌ها، برای متغیر «سن»، میانگین و انحراف استاندارد (انحراف معیار) معیارهای مناسبی هستند، چون داده دورافتاده مشاهده نمی‌کنیم.

ب) کدام معیار گرایش به مرکز و کدام معیار پراکندگی، برای توصیف داده‌های «ساعت‌های تماشای تلویزیون» مناسب‌اند؟ چرا؟ میانه و دامنه میان چارکی، معیارهای گرایش به مرکز و پراکندگی مناسبی هستند؛ زیرا چند داده دور افتاده وجود دارد.

* IQR: Interquartile Range

** SD: Standard Deviation

پ) انحراف کدام داده‌ها از میانگین، باعث بزرگ شدن انحراف معیار متغیر «ساعت‌های تماشای تلویزیون» شده است؟ چگونه؟
داده‌های ۲۹ و ۳۰ فاصله زیادی از میانگین دارند و مجذور این فاصله‌ها باعث بزرگ شدن واریانس و به تبع آن بزرگ شدن انحراف استاندارد (انحراف معیار) شده است.

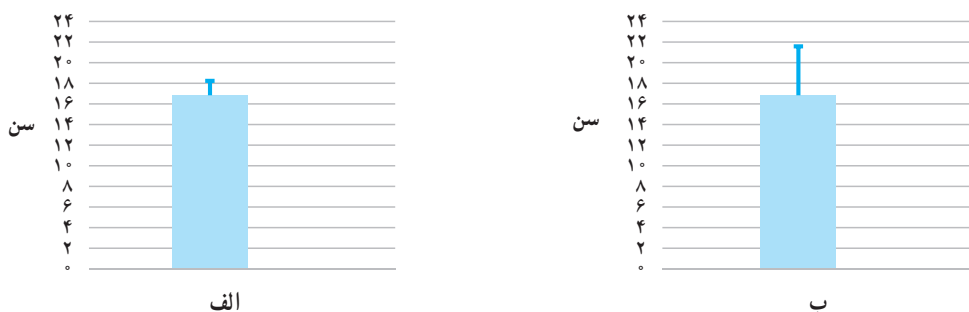
ت) اگر برای توصیف داده‌های متغیر «ساعت‌های تماشای تلویزیون» فقط میانگین گزارش می‌شد، خوانندگانی که به داده‌های خام دسترسی نداشتند چگونه گمراه می‌شدند؟

در واقع میانگین (۹/۷۱)، نماینده مناسبی برای داده‌های «میزان تماشای تلویزیون» نیست و به سمت داده‌های دور افتاده رفته است.

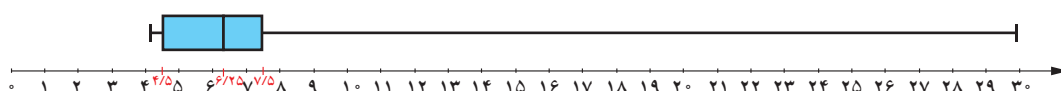
در داده‌هایی که میانگین و انحراف معیار شاخص‌های مناسبی برای توصیف هستند (هنگامی که داده دور افتاده نداشته باشیم)، می‌توانیم از نموداری استفاده کنیم که بلندی مستطیل آن نشان‌دهنده میانگین باشد و میله خطای آن، به اندازه انحراف معیار، روی مستطیل بالا آمده باشد.

ث) با توجه به داده‌های جدول کار در کلاس در صفحه قبل، کدام یک از نمودارهای زیر نشان‌دهنده میانگین و انحراف معیار سن است؟
نمودار الف یا ب؟

نمودار الف



اگر داده‌های دور افتاده داشته باشیم، نمی‌توانیم فقط به نمایش میانگین و انحراف معیار بسنده کنیم؛ زیرا گزارش میانگین می‌تواند گمراه‌کننده باشد. در این گونه موارد باید از نمودار جعبه‌ای استفاده کنیم. برای داده‌های «ساعت‌های تماشای تلویزیون» در مثال بالا، با استفاده از مقدار چارک‌های اول، دوم (میانه) و سوم، ابعاد جعبه (به ترتیب ابتدا، خط میانی و انتها) را روی محور زیر مشخص کنید. سپس، با توجه به کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین داده‌ها، نمودار جعبه‌ای را رسم کنید.



الف) کدام نمودار بهتر نشان می‌دهد که داده‌ها کجا متراکم‌تر و کجا پراکنده‌ترند: نمودار نمایش‌دهنده میانگین و انحراف معیار یا نمودار جعبه‌ای؟

نمودار جعبه‌ای

ب) اگر از الگوی توزیع داده‌ها و وجود داده‌های دورافتاده اطلاعی نداشته باشیم، کدام نمودار برای نمایش اطلاعات متغیرهای کمی مطمئن‌تر است؟

مطمئن‌ترین نمودار برای متغیر کمی، نمودار جعبه‌ای است.

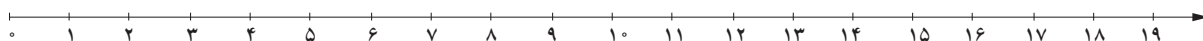
کار در کلاس

۱. دو شرکت به نرگس پیشنهاد کار داده‌اند که یکی از آنها ۳۰ و دیگری ۳۱ کارمند دارد. میانگین حقوق ماهیانه کارمندان شرکت اول، تقریباً ۷/۶ میلیون تومان و میانگین حقوق ماهیانه کارمندان شرکت دوم تقریباً ۱۰ میلیون تومان است. او برای انتخاب یکی از این دو شرکت، از اعظم و مریم نظرخواهی می‌کند.

اعظم می‌گوید: «شرکت دوم را انتخاب کن؛ چون به طور متوسط هر ماه ۴ میلیون تومان درآمد خواهی داشت.»
مریم می‌گوید: «به نظر من این اطلاعات کافی نیست. گزارش معیار گرایش به مرکز بدون معیار پراکندگی چه فایده‌ای دارد؟»
آنها تصمیم می‌گیرند شرایط را کمی بیشتر بررسی کنند پس، در هر شرکت چند نفر را به طور تصادفی انتخاب می‌کنند و اطلاعات زیر را گردآوری می‌کنند.

	حقوق کارمندان								
شرکت اول	۷	۷/۵	۷/۲	۷/۷	۷/۴	۷/۹	۹	۷/۱	۷/۸
شرکت دوم	۶/۷	۷	۱۴	۱۸/۱	۶/۸	۷/۶	۱۶/۱	۶/۹	۶/۸

الف) با استفاده از داده‌های جدول بالا، نمودار جعبه‌ای حقوق ماهیانه کارمندان این دو شرکت را روی یک محور رسم کنید.



ب) با توجه به نمودارهای قسمت الف، درستی یا نادرستی هر یک از عبارتهای زیر را مشخص کنید.

- حقوق تقریباً ۵٪ کارمندان شرکت دوم کمتر از کمترین حقوق کارمندان شرکت اول است.
- اگر نرگس سطح تحصیلات و تجربه متوسطی داشته باشد و این دو شرکت افراد را براساس شایستگی‌هایشان انتخاب کنند، شرکت اول برای او مناسب است.
- در شرکت دوم، میانگین، معیار گرایش به مرکز مناسبی است.



۲. دو مدرسه دوره دوم متوسطه، که تعداد دانش‌آموزانشان تقریباً برابر بود، در سال گذشته با تغییر برنامه‌ها و کادر آموزشی‌شان، وضعیت قبولی دانش‌آموزان خود را در ۱۵ دانشگاه برتر کشور بهبود دادند. مدرسه اول قبولی‌هایش ۲۰۰ درصد افزایش داشت و مدرسه دوم ۲۰ درصد. فرض می‌کنیم اولیا برای انتخاب مدرسه فرزندان خود محدودیتی ندارند.

- الف) در این مسئله، متغیر «قبولی در ۱۵ دانشگاه برتر کشور» (قبول شدن / قبول نشدن) چه نوع متغیری است؟ کمی یا کیفی؟
ب) با توجه به این اطلاعات، کدام مدرسه را به اولیا پیشنهاد می‌کنید؟
پ) افزایش ۲۰۰ درصدی و ۲۰ درصد به چه معناست؟ توضیح دهید.
ت) فرض کنید در مدرسه اول، تعداد قبولی‌ها قبلاً ۱ نفر بوده و با تغییر کادر آموزشی ۳ نفر شده است (۲۰۰٪ افزایش) و در مدرسه دوم، تعداد قبولی‌ها ۷۰ نفر بوده و با تغییر کادر آموزشی ۸۴ نفر شده است (۲۰٪ افزایش). اکنون کدام مدرسه را پیشنهاد می‌کنید؟
ث) در گزارش متغیرهای کیفی، ارائه درصد بدون مشخص کردن تعداد، چگونه می‌تواند گمراه کننده باشد؟

برای توصیف داده‌های کیفی (اسمی یا ترتیبی) گزارش درصد باید همیشه با گزارش تعداد همراه باشد.

گام ۵ (بحث و نتیجه‌گیری) 

پس از تحلیل داده‌ها، باید بتوانیم با تفسیر نتایج، پاسخی برای مسئله اصلی پیدا کنیم. در تفسیر نتایج، توجه به محدودیت‌های مطالعه‌ای که انجام داده‌ایم بسیار مهم است. روش کار و محدودیت‌های آن باید چنان صادقانه گزارش شود که اگر افراد دیگری تصمیم به انجام دادن مطالعه‌ای در همان زمینه داشتند، با مشکلاتی مشابه مواجه نشوند. پیشنهادهای ما می‌تواند به این افراد کمک کند. اگر ضمن توجه به تمامی نکات نمونه‌گیری، داده‌ها را با روش‌های مناسبی تحلیل کرده باشیم، در بهترین حالت می‌توانیم نتایج را فقط به جامعه آماری مورد بررسی تعمیم دهیم؛ توجه کنید که اگر تمامی افراد جامعه آماری را بررسی نکرده‌ایم، نتایج ما قطعی نیستند؛ چون در نمونه‌گیری دیگری از همین جامعه، افراد دیگری در نمونه قرار می‌گیرند و نتایج متفاوتی به دست خواهد آمد. (از جامعه‌ای با اندازه N به چند طریق می‌توانیم نمونه‌هایی با اندازه n داشته باشیم؟)

یکپارچگی چرخه آمار در حل مسائل



همان‌طور که دیدید، در تمامی گام‌های حل مسئله مرتبط با آمار، لازم است مسئله مورد بررسی، متغیرها و عوامل مرتبط با آنها را خوب بشناسیم. این امر، بدون کار گروهی و همکاری کارشناسان زمینه پژوهش مورد بررسی، ممکن نیست. مثلاً اگر آمارگیران از اهداف کلی مطالعه باخبر نباشند یا فردی که داده‌ها را تحلیل می‌کند، ویژگی‌های جامعه آماری یا موضوع مورد بررسی را به خوبی نشناسد، حتی اگر هر فرد به صورت جداگانه کار خود را خیلی خوب انجام دهد، نتیجه نهایی لزوماً مطلوب نخواهد بود.

باید توجه داشته باشیم که اگر مطالعه در منطقه‌ای انجام می‌شود که ویژگی‌های آن را به خوبی نمی‌شناسیم، در تمام گام‌ها به دانش اهالی منطقه اولویت دهیم.

کیفیت اجرای هر یک از گام‌های چرخه آمار، گام‌های دیگر را به شدت تحت تأثیر قرار می‌دهد. مثلاً برای نقد معیارهای گزارش شده در یک مطالعه، نه تنها می‌توانیم چرایی گزارش میانگین یا میانه و یا گزارش نشدن شاخص پراکندگی را نقد کنیم، بلکه باید درباره چگونگی نمونه‌گیری، شیوه اندازه‌گیری، نوع ورود داده‌ها و تمامی موارد گام‌های دیگر چرخه نیز تردید و پرسش داشته باشیم.



مثالی واقعی از پروژه‌ای که با موضوع «بررسی قدمت بناهای مسکونی چند روستا» انجام شده، نشان می‌دهد که چگونه مشارکت ندادن تمامی اعضاء گروه اجراکننده می‌تواند ما را از پاسخ مسئله کاملاً دور کند. برای اجرای این پروژه کارشناسان طی جلساتی به طراحی و برنامه‌ریزی جزئیات کار پرداختند و سپس برای گردآوری داده‌ها چند نفر را استخدام کردند. آمارگیرها بدون اطلاع از چگونگی شکل‌گیری مسئله و اهداف پروژه، برای پرکردن پرسشنامه‌ها به منازل مختلف مراجعه کردند. هنگام وارد کردن داده‌ها، در نرم‌افزار، در چندین پرسشنامه در مقابل متغیر «سن بنا» نوشته شده بود: «فوت شده است».

کار در کلاس

۱. برای احداث یک استخر در حاشیه یک کلان‌شهر، محل مناسبی انتخاب، و با همکاری گروهی متخصص، استخری مجهز و اصولی در آن محل ساخته شد. پس از بهره‌برداری از استخر، مشاهده شد که اغلب اوقات افراد مسن زیادی، که شناگر نبودند، به توصیه پزشکی در قسمت کم‌عمق در حال راه رفتن در آب‌اند و در قسمت عمیق گاهی فقط چند نفر شنا می‌کنند.

الف) آگاهی از میانگین سنی افراد منطقه احداث استخر، چگونه می‌توانست به اجرای این پروژه کمک کند؟

ب) چگونه مشورت با افراد بومی می‌توانست به متخصصان کمک کند که ابعاد قسمت کم‌عمق و عمیق استخر را متناسب با نیاز منطقه طراحی کنند؟

۲. هر یک از موارد زیر اجرای نادرست کدام گام است و بر کدام گام‌های دیگر اثر می‌گذارد؟ چگونه؟

الف) مسئله به صورتی بیان شده است که اجراکنندگان برداشت‌های متفاوتی از اهداف پژوهش دارند.

ب) اندازه‌گیری وزن افراد نمونه با دو واحد متفاوت (کیلوگرم و پوند) انجام شده است.



پ) تمامی داده‌های دورافتاده حذف شده‌اند.

ت) نتایج را فقط افراد متخصص آمار تفسیر کرده‌اند.

خواندنی

پادشاهی پسر خود را به جماعتی اهل هنر سپرده بود تا او را از علوم نجوم و رمل و غیره آموخته بودند و استاد تمام گشت با کمال کودنی. روزی پادشاه انگستری در مُشت گرفت؛ فرزند خود را امتحان کرد که بیا بگو در مُشت چه دارم؟ پسر گفت: «آنچه داری گرد است و زرد است و مُجَوَّف (میان‌تهی) است.» پادشاه گفت: «چون نشان‌های راست دادی، پس حکم کن که آن چه چیزی باشد.» پسر گفت: «باید که غریب (غریب، الک) باشد.» پادشاه گفت: «از قوت تحصیل و دانش این چندین نشان‌های دقیق دادی که عقول در آن حیران شوند اما ندانستی که غریب در مُشت نگنجد؟»
برگرفته از فیه ما فیه — مولانا جلال‌الدین محمد

تمرین

۱. به نظر می‌رسد کودکانی که زبان مادری‌شان فارسی نیست، در دوره دبستان مشکلات بیشتری برای یادگیری مفاهیم درسی دارند. با انتخاب یک جامعه آماری محدود (از نظر پایه تحصیلی، جنسیت، منطقه، زبان مادری و...) و انتخاب متغیر مناسب، این مسئله را به صورت دقیق و شفاف بیان کنید.

۲. با توجه به تأثیر شیوه‌های مختلف حمل و نقل بر محیط‌زیست، می‌خواهیم در یک کلاس ۲۸ نفره با انتخاب تصادفی ۹ نفر از دانش‌آموزان، از آنها پرسیم در هفته گذشته، بیشتر به کدام یک از شیوه‌های زیر به مدرسه آمده‌اند؟

● ۱- پیاده یا با دوچرخه

○ ۲- با وسایل حمل و نقل عمومی

● ۳- با سرویس مدرسه یا خودروی شخصی.

الف) در این مطالعه، جامعه آماری، نمونه آماری، اندازه جامعه و اندازه نمونه را مشخص کنید.

ب) داده‌های این مطالعه را با چه روشی می‌توان گردآوری کرد؟ چه مشکلاتی ممکن است در گردآوری این داده‌ها رخ دهد؟

پ) متغیر تصادفی مورد بررسی این مطالعه چیست؟ نوع متغیر (کمی/کیفی) و مقیاس اندازه‌گیری (فاصله‌ای/نسبتی – اسمی/ترتیبی) آن را مشخص کنید.

ت) چه نمودارها و آماره‌هایی برای گزارش نتایج این مطالعه مناسب‌اند؟

ث) آیا می‌توانیم این نتایج را به شیوه رفت و آمد دانش‌آموزان این کلاس در کل سال تحصیلی تعمیم دهیم (مثلاً به فصل‌های مختلف یا زمان برگزاری آزمون‌های پایان نیم‌سال)؟ توضیح دهید.

ج) اگر ۹ نفر دیگر از این کلاس را به‌طور تصادفی انتخاب می‌کردیم، آیا دقیقاً همین نتایج حاصل می‌شد یا امکان داشت حداقل نتایج کمی تغییر کند؟ توضیح دهید.

۳. در هریک از موارد زیر، علت عدم تناسب جامعه آماری با نمونه‌های انتخاب شده را توضیح دهید. برای بهبود نمونه‌گیری چه پیشنهادی دارید؟ انتخاب نادرست نمونه در هریک از موارد چگونه بر نتایج تأثیر می‌گذارد؟

الف) مسئله: بررسی میزان رضایت شغلی در کارمندان یک کارگاه شبانه‌روزی
نمونه: انتخاب تصادفی تعدادی از مدیران ارشد شیفت روز

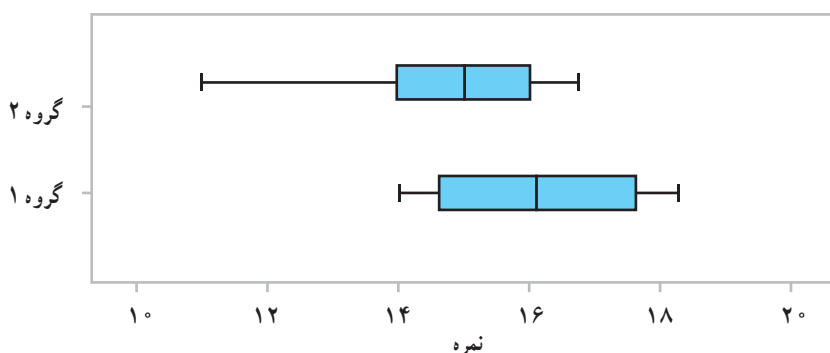
ب) مسئله: نظرسنجی از مادران یک شهر درباره میزان رضایتشان از برنامه‌های کودک تلویزیون
نمونه: انتخاب تصادفی برخی منازل از تمامی مناطق شهر و مراجعه به آنها بین ساعت ۸ تا ۱۰ صبح

پ) مسئله: نظرسنجی از دانش‌آموزان پایه دوازدهم منطقه ۲ بوشهر درباره اینکه به‌طور متوسط چند ساعت از روز را به انجام دادن تکالیف مدرسه اختصاص می‌دهند.

نمونه: دختران پایه دوازدهم یک مدرسه از این منطقه که به‌صورت داوطلبانه در این مطالعه مشارکت کرده‌اند.

۴. «مطالعات دانشمندان علوم اعصاب نشان می‌دهد که مغز انسان برای انجام دادن هم‌زمان چند فعالیت ساخته نشده است و هر بار که ما گمان می‌کنیم مشغول انجام دادن چند کار به صورت هم‌زمان هستیم، درواقع مغزمان دارد با سرعت از کاری به کار دیگر می‌پرد. مغز انسان تشنهٔ خبرها و اتفاقات جدید است. وقتی مشغول مطالعه و یادگیری هستیم و ناگهان صدای دریافت یک پیام را از تلفن همراه خود می‌شنویم، مغز ما، که بی‌تابانه منتظر کشف آن اطلاع جدید است، دیگر روی یک کار متمرکز نیست. این مطالعات نشان می‌دهد که مثلاً اگر دانش‌آموزی هنگام مطالعه و یادگیری، هم‌زمان تلویزیون تماشا کند یا گفت‌وگویی را در یک شبکهٔ اجتماعی دنبال کند، مطالب درسی به جای اینکه به قسمت حقایق و ایده‌ها برود، به قسمت مهارت‌ها فرستاده می‌شود.»

سعید و سهراب پس از خواندن این مطلب در نشریهٔ مدرسه تصمیم گرفتند نمرهٔ عملکرد تحصیلی ۲۵ دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم مدرسه را که هنگام مطالعه، تلفن همراه خود را در حالت بی‌صدا قرار می‌دهند (گروه یک)، با ۲۵ دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم دیگر که این کار را انجام نمی‌دهند (گروه دو) مقایسه کنند. نتایج این مطالعه به این شرح است:



الف) از مقایسهٔ میانهٔ گروه یک با چارک سوم گروه دو چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ب) پراکندگی دو گروه را با استفاده از دامنهٔ تغییرات و دامنهٔ میان چارکی مقایسه کنید.

پ) از مقایسهٔ کمینهٔ گروه یک با چارک اول گروه دوم چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ت) در کدام گروه گزارش میانگین و انحراف معیار می‌تواند گمراه‌کننده باشد؟

ث) در کدام گروه مقدار میانگین و میانه به هم نزدیک‌ترند؟

ج) نتایج این مطالعه را به چه جامعه‌ای می‌توان تعمیم داد؟

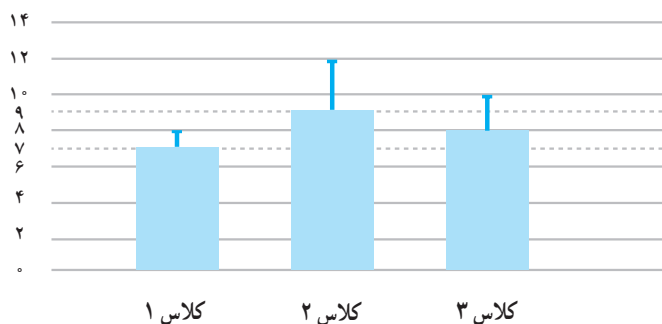
۵. در یک نظرسنجی، از ۱۵ دانش آموز علوم انسانی پایه یازدهم یک مدرسه پرسیده ایم که به نظر آنها چند ساعت آموزشی در ماه برای برگزاری جلسات نقد کتاب یا فیلم مناسب است. داده های گردآوری شده به این شرح است:

۱۶ ۱۰ ۱۲ ۱۰ ۱۲ ۱۳ ۶ ۴ ۰ ۲۰ ۱۸ ۲۲ ۲۰ ۱۴ ۱۲

الف) این داده ها را طوری تغییر دهید که میانگین و انحراف معیار بیشتر شود اما میانه و چارک اول و چارک سوم تغییر نکند.

ب) فرض کنید می خواهیم دو نفر دیگر به این نمونه اضافه کنیم. داده های این دو نفر را طوری انتخاب کنید که میانگین و میانه تغییر نکند.

۶. با توجه به تأثیر کمیت و کیفیت خواب بر یادگیری، ندا و آوا در مطالعه ای با بررسی تمامی دانش آموزان سه کلاس پایه دهم، میانگین میزان خواب این دانش آموزان را در هفته گذشته برحسب ساعت پرسیدند و ثبت کردند. آنها پس از گردآوری داده ها و بررسی درستی آن را به صورت نمودارهای زیر نمایش دادند. (در این نمودارها بلندی مستطیل، نشان دهنده میانگین و میله خط نشان دهنده انحراف معیار است.)



الف) چه عواملی ممکن است هنگام گردآوری داده ها نتایج را از واقعیت دور کند؟ (هنگامی که از دانش آموزان راجع به میانگین ساعت خوابشان در هفته گذشته می پرسیم آیا آن ها می توانند به درستی به یاد آورند که هر شب چند ساعت خوابیده اند تا بتوانند میانگین را به درستی اعلام کنند؟ برای حل این مشکل چه راهکاری پیشنهاد می کنید؟)

ب) نوع (کمی/کیفی) و مقیاس اندازه گیری (فاصله ای/نسبتی – اسمی/ترتیبی) متغیر مورد بررسی در این مطالعه را مشخص کنید.

پ) با استفاده از اطلاعات نمودارها، نتایج را به صورت تقریبی در جدول زیر بنویسید.

	کلاس ۱	کلاس ۲	کلاس ۳
میانگین			
انحراف معیار			

ت) چه کسانی می توانند در اجرای بهتر این مطالعه به ما کمک کنند؟ چگونه؟

۷. مدرسه‌ای برای ترویج فرهنگ کتاب‌خوانی، از دو سال پیش به غیر از دانش‌آموزان مدرسه، از خارج از مدرسه نیز عضو می‌پذیرد. نمودار میله‌ای زیر نشان‌دهنده روند تغییرات فراوانی اعضای جدید کتابخانه در دو گروه مذکور است.

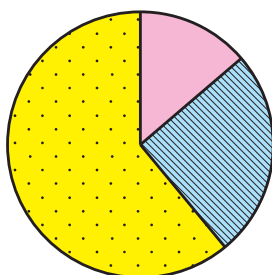


الف) سال گذشته چند نفر از خارج مدرسه عضو کتابخانه شده‌اند؟

ب) با توجه به روند این تغییرات، پیش‌بینی می‌کنید سال آینده چه تعداد از دانش‌آموزان این مدرسه عضو کتابخانه شوند؟

پ) با استفاده از نمودارهای میله‌ای داده شده، برای هریک از این سه سال یک نمودار دایره‌ای جداگانه رسم کنید.

ت) به نظر شما چه عواملی موجب این روند تغییرات شده است؟



۸. فراوانی بازدیدکنندگان از یک سالن نمایش در گروه‌های سنی مختلف در نمودار دایره‌ای روبه‌رو نمایش داده شده است. (در این نمودار، ۵۴ درجه مربوط به گروه سنی کمتر از ۲۰ سال، ۹۰ درجه مربوط به گروه سنی ۲۰ تا ۴۰ سال و بقیه مربوط به گروه سنی ۴۰ تا ۶۰ سال است.)

۴۰ تا ۶۰ سال ۲۰ تا ۴۰ سال کمتر از ۲۰ سال

الف) با توجه به این نمودار، چند درصد افراد بازدیدکننده بین ۴۰ تا ۶۰ سال سن دارند؟

ب) مسئول فروش بلیت این سالن نمایش پس از مشاهده نتایج، آن را غیرواقعی دانست و گفت: «بیشتر بازدیدکنندگان این سالن کمتر از ۴۰ سال دارند.» از موارد زیر کدام می‌تواند نتایج این مطالعه را بدین شکل از واقعیت دور کرده باشد؟ توضیح دهید.

- بسیاری از افراد کمتر از چهل سال تمایلی به پاسخ‌گویی به سؤالات پرسشگر نداشته‌اند.
- گردآوری داده‌ها در ساعات اداری انجام شده است و بازنشستگان بیشتری در نمونه قرار گرفته‌اند.
- هنگام گردآوری داده‌ها، دانش‌آموزان بسیاری از طرف مدرسه برای بازدید حضور داشته‌اند.

۹. جدول زیر نشان‌دهندهٔ تعداد تصادف خودروها و سرعت حرکت آنها در زمان تصادف است.

(کیلومتر در ساعت) سرعت	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰	۶۰	۷۰	۸۰	۹۰	۱۰۰	۱۱۰	۱۲۰
تعداد خودروهای تصادف کرده	۴۰	۱۳۰	۲۱۰	۲۵۰	۳۵۰	۲۴۰	۱۵۰	۷۰	۴۰	۲۰	۲۰	۱۰

همان‌طور که دیده می‌شود، تعداد تصادف خودروهایی که سرعتشان بیش از ۹۰ کیلومتر در ساعت بوده، کمتر است. پس:

«هرچه سریع‌تر بروید، مطمئن‌تر و امن‌تر است.»

نتیجه‌گیری بالا چه اشکالی دارد؟ چرا این تصور ایجاد شده است؟

پروژه

موضوعی دلخواه یا یکی از موضوعات زیر را انتخاب کنید و با استفاده از گام‌های چرخهٔ آمار، نتایج حاصل را در قالب یک گزارش در کلاس ارائه کنید.

- بررسی ساعات روزانهٔ حضور دانش‌آموزان در شبکه‌های اجتماعی
- نظرسنجی دربارهٔ تغییر قوانین حاکم بر کلاس یا مدرسه
- نظرسنجی دربارهٔ کلاس درسی که می‌توانید پرسش‌های خود را آزادانه در آن مطرح کنید.
- نظرسنجی دربارهٔ ساعات لازم برای تدریس ریاضی در کلاس دوازدهم انسانی
- بررسی ساعت‌های مطالعهٔ آزاد دانش‌آموزان و مقایسهٔ آن بین دو گروه از دانش‌آموزان
- بررسی فعالیت‌های فوق برنامهٔ مورد علاقهٔ دانش‌آموزان.



فصل ۲- الگوهای خطی

درس ۱ مدل سازی و دنباله

درس ۲ دنباله های حسابی



إِنَّ فِي خَلْقِ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ وَالاخْتِلَافِ اللَّيْلِ وَالنَّهَارِ لَآيَاتٍ لِأُولِي الْأَلْبَابِ (آیه ۱۹۰ / سورة مبارکه آل عمران)
« و مسلماً در آفرینش آسمان ها و زمین و آمدورفت شب و روز نشانه های (روشنی) برای خردمندان است»



در جهان اطراف ما الگوهای خطی و غیرخطی بسیاری وجود دارد. این الگوها هم در جانداران و هم در طبیعت قابل مشاهده است.

درس ۱

مدل سازی و دنباله

مدل سازی

در کتاب یازدهم با بررسی مسائلی از دنیای واقعی، مانند محاسبهٔ قبض برق یک خانه یا مدل ریاضی چراغ راهنمایی و رانندگی، با مفهوم مدل سازی آشنا شدیم (رسم نمودار توابع متناظر با مفهوم مطرح شده).

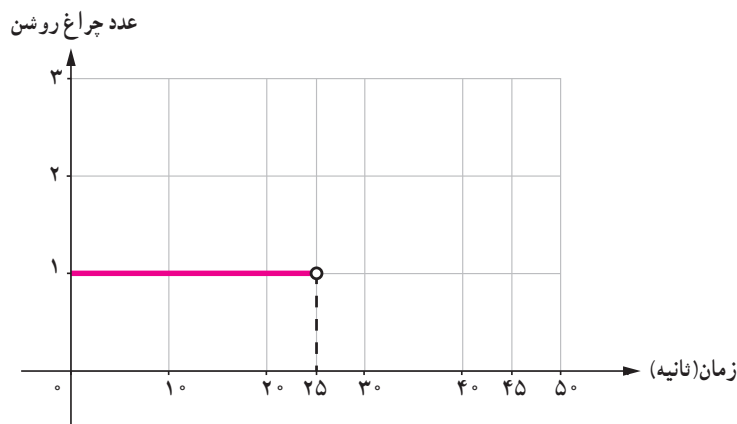
فعالیت



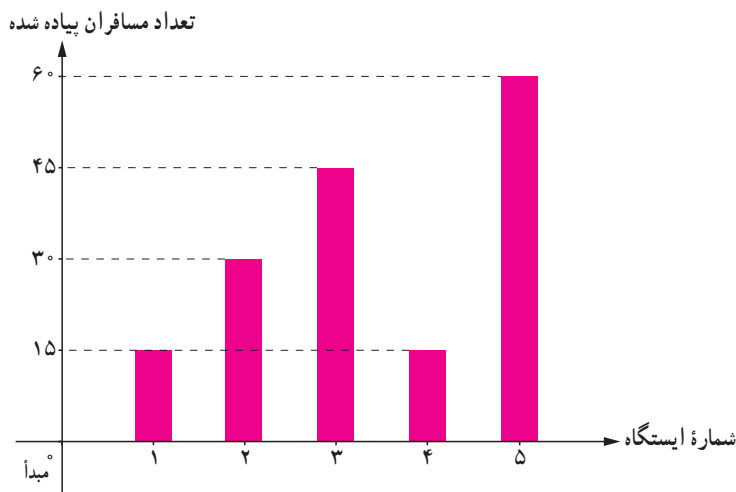
۱. یک چراغ راهنمایی و رانندگی از لحظهٔ شروع به کار ۲۵ ثانیه سبز، ۵ ثانیه زرد و ۱۵ ثانیه قرمز است. مدل ریاضی مسئله را در ۴۵ ثانیهٔ اول شروع به کار چراغ راهنمایی و رانندگی به کمک تابع بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

اگر چراغ روشن سبز عدد ۱، زرد عدد ۲ و قرمز عدد ۳ باشد و $f(t)$ عدد چراغ روشن در ثانیهٔ t ام، با توجه به فرض:

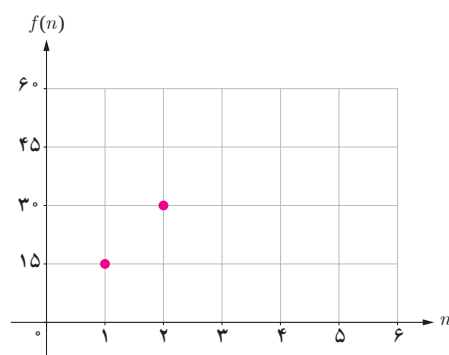
$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 25 \\ \dots & 25 \leq t < 30 \\ 3 & \dots \leq t < \dots \end{cases} \quad D_f = \{t \in \mathbb{R} \mid \dots \leq t < \dots\}, R_f = \{ \quad , \quad , \quad \}$$



۲. نمودار میله‌ای زیر، تعداد مسافران پیاده شده در هر ایستگاه یک خط مترو در یک مسیر رفت را نشان می‌دهد. اگر n ، شماره ایستگاه و $f(n)$ تعداد مسافران پیاده شده از نخستین ایستگاه بعد از مبدأ باشد، جدول، نمودار، ضابطه، دامنه و برد تابع را کامل کنید.



n	۱	۲	۳	۴	۵
$f(n)$	۱۵	۳۰			



$$f(n) = \begin{cases} \dots\dots\dots & 1 \leq n \leq 3 \\ 15 + 45(n-4) & 4 \leq n \leq 5 \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

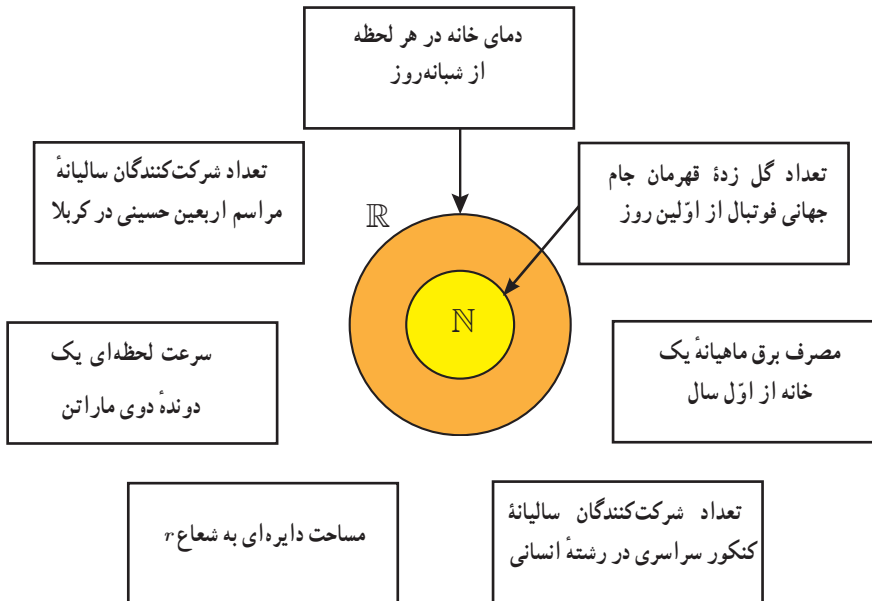
$$D_f = \{n \in \mathbb{N} | \dots \leq n \leq \dots\} \quad R_f = \{ \quad , \quad , \quad , \quad \}$$

یکی از تفاوت‌های توابع مطرح شده در فعالیت الف و ب، دامنه آنهاست. با توجه به اینکه در فعالیت اول، دامنه تابع زمان شروع به کار چراغ راهنمایی و رانندگی تا ثانیه ۴۵م است و تابع در تمامی این زمان، قابل تعریف است، پس دامنه تابع زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی انتخاب شده است.

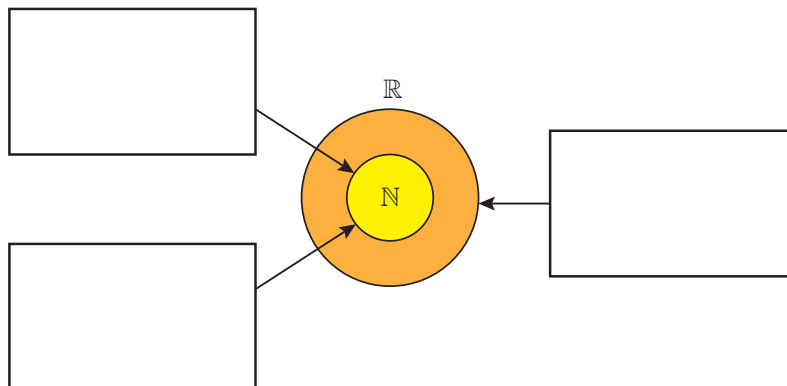
در فعالیت دوم، دامنه تابع بیانگر شماره ایستگاه‌های قطار است؛ زیرا عدد ۱، ایستگاه اول، عدد ۲، ایستگاه دوم و... است. پس، دامنه تابع زیرمجموعه‌ای از مجموعه اعداد طبیعی است.

کار در کلاس

۱. اگر f تابع مدل ریاضی هر کدام از مسائل زیر باشد، دامنه هر کدام از مسائل را مشخص کنید.



۲. داخل هر کدام از مستطیل‌های زیر مسئله‌ای را بنویسید که دامنه مدل ریاضی آن مطابق شکل زیر باشد :



در تعیین دامنه تعریف توابعی که پاسخ آنها وابسته به بررسی مسئله در مرحله یا گام اوّل، دوم، ... و n ام است، از مجموعه اعداد طبیعی استفاده می‌کنیم.

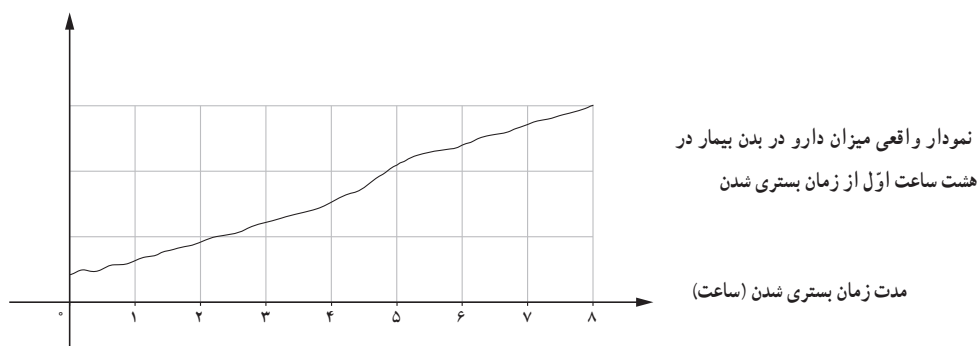
کاربرد دیگر از مجموعه اعداد طبیعی

در بسیاری از مسائل واقعی مانند مسائلی که وابسته به زمان اند، ممکن است بررسی تابع در هر لحظه از نظر عملی امکان پذیر نباشد. در این حالت، با انتخاب نقاطی با فاصله زمانی یکسان رفتار تابع را به طور تقریبی بررسی می کنیم.

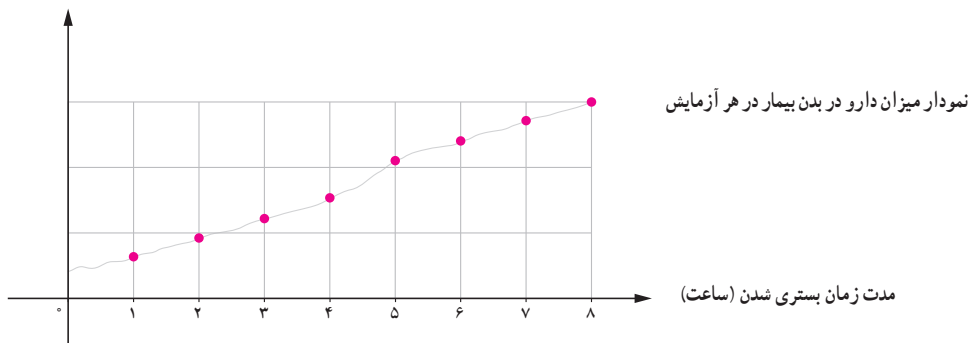
برای مثال، از لحاظ نظری یک پزشک می تواند میزان دارو را در بدن بیمار در هر لحظه از شبانه روز اندازه گیری کند اما در عمل او با فواصل زمانی یکسان (مثلاً در هر یک ساعت از زمان بستری شدن بیمار) به کمک آزمایش، میزان دارو را در بدن بیمار بررسی می کند.

به بیان ریاضی، این پزشک رفتار تابعی را که در مجموعه اعداد حقیقی تعریف شده است، در مجموعه اعداد طبیعی بررسی می کند (میزان دارو در اولین آزمایش، دومین آزمایش و...).

میزان دارو در بدن بیمار (میلی گرم)



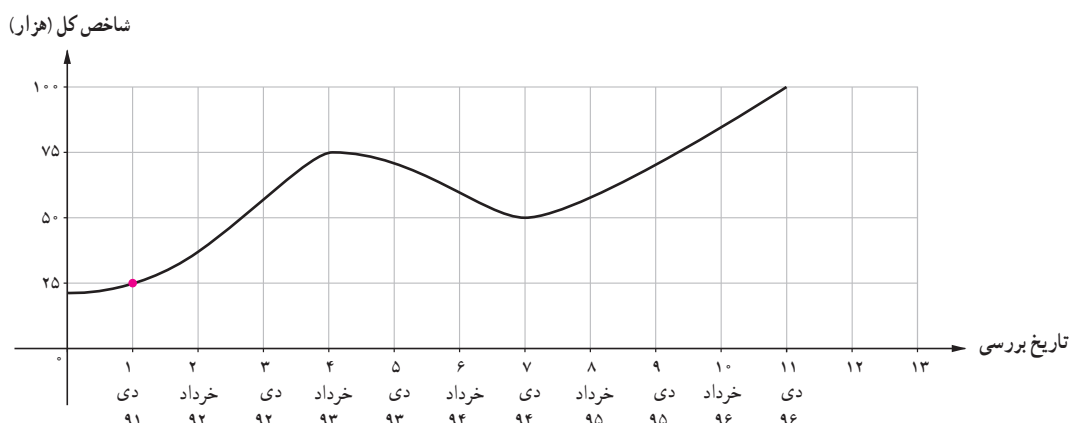
میزان دارو در بدن بیمار در هر آزمایش (میلی گرم)



در فعالیت صفحه بعد، نمونه ای دیگر از همین کاربرد را می بینیم.

فعالیت

نمودار زیر شاخص قیمت بورس اوراق بهادار تهران^۱ (شاخص کل) را از دی ماه ۱۳۹۱ تا دی ماه ۱۳۹۶ به طور تقریبی نشان می دهد:



الف) روی نمودار، نقاطی را مشخص کنید که شاخص کل سهام را در تاریخ های نوشته شده معلوم کند. در نمودار بالا، شاخص کل در چه فاصله ای روند کاهشی و در چه فاصله ای روند افزایشی داشته است؟ چرا؟
 ب) اگر به ترتیب دی ۱۳۹۱ را اولین، خرداد ۱۳۹۲ را دومین و... و دی ۱۳۹۶ را یازدهمین تاریخ مورد بررسی در نظر بگیریم و رابطه میان شاخص کل با زمان را با تابع f نشان دهیم، جدول زیر را کامل کنید.

n امین تاریخ بررسی	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
$f(n)$ مقدار شاخص کل (هزار)	۲۵	...	...								

ج) با توجه به رفتار شاخص کل از دی ماه ۱۳۹۴ تا دی ماه ۱۳۹۶ (زمان تألیف این پرسش)، اگر رفتار تابع (شاخص کل) به همین صورت ادامه یابد، کدام یک از اعداد زیر تقریب بهتری برای $f(۱۳)$ است؟ چرا؟

۸۵,۰۰۰ (۱) ۱۰۵,۰۰۰ (۲) ۱۱۲,۵۰۰ (۳) ۱۰۰,۰۰۰ (۴) ۱۲۵,۰۰۰ (۵)

د) با مراجعه به پایگاه www.tse.ir مقدار به دست آمده برای دی ماه ۱۳۹۷ را با مقدار واقعی آن مقایسه کنید.

۱. شاخص بورس تهران، TEPIX : Tehran Price Index

خواندنی

«شاخص بورس تهران امروز با ۱۵۰۰ واحد افزایش به ۸۵۰۰۰ واحد رسید»، «شاخص بورس امروز ۵۰۰ واحد افت داشت» اینها نمونه جملاتی است که بارها در اخبار اقتصادی شنیده‌ایم، اما این اعداد چه معنایی دارند؟ بازار بورس شاخص‌های مختلفی دارد اما شاید معروف‌ترین آنها – که در اخبار مطرح می‌شود – «شاخص کل» بورس باشد؛ همان شاخصی که نمودار آن در فعالیت پیش بررسی شد. این شاخص از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\text{شاخص سهام کل} = \frac{\text{ارزش جاری بازار}}{\text{ارزش پایه سهام}} \times ۱۰۰$$

در این تعریف، سال پایه سال ۱۳۶۹ در نظر گرفته شده است. منظور از ارزش جاری بازار، مجموع حاصل ضرب‌های «ارزش سهام در همان روز $\times$ تعداد سهام در روز مورد بررسی» برای تک تک شرکت‌هایی است که در بازار بورس قرار دارند. منظور از ارزش پایه سهام، نیز مجموع حاصل ضرب‌های «ارزش سهام در روز پایه $\times$ تعداد سهام در روز بررسی»^۱ است. برای درک بهتر، به مثال زیر توجه کنید. – فرض کنید در بازار بورس فقط دو شرکت A و B وجود داشته باشند. شاخص سهام کل بازار بورس مثلاً در تاریخ ۱۲ بهمن ۱۳۹۶ به کمک اطلاعات جدول زیر قابل محاسبه است.

شرکت	تعداد سهام شرکت در زمان ورود به بورس (۲۰ فروردین ۱۳۶۹)	قیمت سهام شرکت در تاریخ پایه	تعداد سهام شرکت در ۱۲ بهمن ۱۳۹۶	قیمت سهام در ۱۲ بهمن ۱۳۹۶
A	۱۰۰۰	۴۵	۱۲۰۰	۶۰
B	۵۰۰	۳۰	۱۵۰۰	۸۰

$$\text{شاخص سهام کل} = \frac{۱۲۰۰ \times ۶۰ + ۱۵۰۰ \times ۸۰}{۱۲۰۰ \times ۴۵ + ۱۵۰۰ \times ۳۰} \times ۱۰۰ = \frac{۱۹۲,۰۰۰}{۹۹,۰۰۰} \times ۱۰۰ = ۱/۹۳ \times ۱۰۰ = ۱۹۳$$

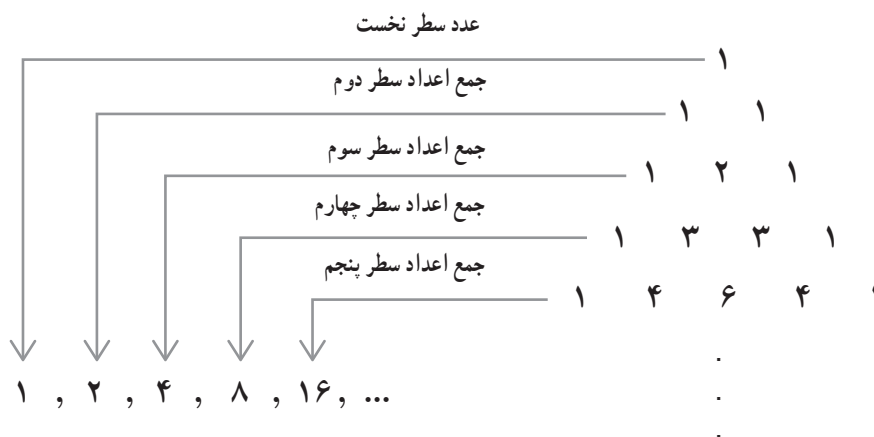
عدد ۱۹۳ به معنای ۱۹۳ برابر شدن ارزش بازار در ۱۲ بهمن ۱۳۹۶ نسبت به ۲۰ فروردین ۱۳۶۹ است. توجه داشته باشید که شاخص کل، واحد ندارد و این عدد به تنهایی سود یا ضرر را نشان نمی‌دهد بلکه تغییرات آن اهمیت دارد. برای مثال، اگر شما از سهام تمام شرکت‌های بورس یک سهم خریده باشید، در این صورت تغییرات شاخص کل بورس میزان بازدهی شماست؛ یعنی اگر شاخص کل بورس در یک سال از ۲۰۰۰ واحد به ۳۰۰۰ واحد برسد، یعنی ۵۰٪ رشد کند، میانگین بازدهی بورس طی یک سال برای شما ۵۰٪ بوده است.

۱. فرمول بالا به روش محاسبه «لاسپیرز» (Laspeyres) معروف است.

در سال‌های پیش با مفهوم الگو و یافتن جمله n ام یک الگو آشنا شدیم.^۱ عموماً این الگوها را نیز می‌توانیم به کمک تابعی با دامنه اعداد طبیعی مدل‌سازی کنیم.

فعالیت

برای نوشتن جملات یک الگو در مثلث زیر^۲، اعداد هر سطر را به صورت زیر با یکدیگر جمع می‌کنیم:



اگر n شماره هر سطر و a_n (جمله n ام الگو) جمع اعداد هر سطر باشد:

(الف) با محاسبه مجموع اعداد سطر ششم و هفتم مثلث خیام، جملات ششم (a_6) و هفتم (a_7) الگو را مشخص کنید.

(ب) بر اساس رابطه میان a_1 و a_2 و رابطه میان a_2 و a_3 و نیز a_3 و a_4 می‌توان مقادیر a_5 و a_6 را مشخص کرد؟ چگونه؟

(ج) آیا به کمک قسمت ب، می‌توانیم رابطه میان هر دو جمله متوالی a_n و a_{n+1} را مشخص کنیم؟ آیا با این رابطه فقط جملات الگوی بالا به دست می‌آید؟ چرا؟

(د) رابطه‌ای را که بیانگر ارتباط جملات دنباله با یکدیگر است، رابطه بازگشتی^۳ می‌نامیم. برای دنباله اعداد بالا رابطه‌ای بازگشتی بنویسید که فقط جملات دنباله بالا را مشخص کند.

(ه) رابطه‌ای میان n و a_n بنویسید که جملات الگوی بالا را مشخص کند. ($n \in \mathbb{N}$)

(و) رابطه بازگشتی به دست آمده در قسمت «د» چه تفاوتی با ضابطه به دست آمده از قسمت «ج» دارد؟

۱. کتاب ریاضی هفتم و هشتم

۲. اعداد نمایش داده شده تشکیل مثلثی را می‌دهد که به مثلث خیام معروف است و از آن در تعیین ضرایب چندجمله‌ای " $(a + b)^n$ " استفاده می‌شود.

۳. Recursive Sequence

الگوی اعداد حقیقی، مانند صفحه قبل، را که در آن تعدادی عدد حقیقی پشت سر هم قرار دارند دنباله اعداد حقیقی می نامند. جملات دنباله عموماً به صورت $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ نشان داده می شوند. a_n را جمله n ام دنباله می نامند که می تواند به دو صورت زیر بیان شود:

الف) رابطه با جملات دیگر دنباله (رابطه بازگشتی)
 ب) رابطه ای بر حسب $n \in \mathbb{N}$ (ضابطه تابعی دنباله).

برای مثال، در دنباله

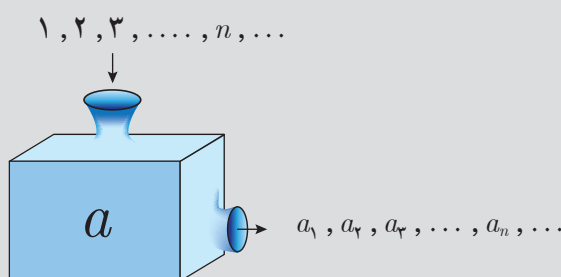
$$\begin{array}{ccccccccc} 4, & 7, & 10, & 13, & 16, & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & \dots \end{array}$$

با در نظر گرفتن $a_1 = 4$ ، بقیه جملات دنباله با اضافه کردن عدد ثابت ۳ به جمله پیشین به دست می آیند؛ یعنی:

$$a_{n+1} = a_n + 3 \quad (\text{رابطه بازگشتی دنباله})$$

و یا می توان الگوی جملات دنباله را با ضابطه $a_n = 3n + 1$ نمایش داد که در این رابطه، n عددی طبیعی است و با جای گذاری در تساوی داده شده، مقدار هر جمله به طور مستقیم به دست می آید.

تعریف دنباله: همان طور که مشاهده شد، اگر a تابعی از $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ باشد اعضای بُرد این تابع می تواند دنباله ای از اعداد را تولید کند که به ترتیب، جمله اول آن را $a(1)$ ، جمله دوم را $a(2)$ ، جمله سوم را $a(3)$ ، ... و جمله n ام را $a(n)$ در نظر می گیریم. معمولاً جملات دنباله را به جای $a(n)$ با a_n نشان می دهند که آن را جمله n ام، جمله عمومی دنباله یا ضابطه دنباله می نامند.



با توجه به ضابطه دنباله داده شده، جاهای خالی را پر کنید.

جمله n ام	پنج جمله اول دنباله
$a_n = 3n - 2$	۱, ۴, ۷, ۱۰, ۱۳
$b_n = n^2 - 1$	۰, ۳, ۸, ..., ۲۴
$c_n = \frac{1}{n}$	, $\frac{1}{2}$,,,
$d_n = \frac{(-1)^n}{n}$	-۱, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$,,

مثال: برای جملات دنباله زیر:

۳, ۹, ۲۷, ۸۱, ۲۴۳ و ...

الف) رابطه بازگشتی دنباله را مشخص کنید.

ب) ضابطه تابعی دنباله را به دست آورید.

الف) برای نوشتن رابطه بازگشتی در اولین دنباله، رابطه میان جملات دنباله را بررسی می کنیم:

$$a_1 = 3 \quad \text{و} \quad a_2 = 9 = 3a_1 \quad \text{و} \quad a_3 = 27 = 3 \times 9 = 3a_2 \quad \text{و} \quad a_4 = \dots$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = 3a_n, \quad a_1 = 3$$

یعنی، هر جمله دنباله ۳ برابر جمله پیشین است. بدیهی است که تنها رابطه $a_{n+1} = 3a_n$ جملات دنباله را مشخص نمی کند و حتماً باید یک جمله، مثلاً جمله اول آن یعنی $a_1 = 3$ نوشته شود.

ب) در نوشتن ضابطه تابعی دنباله باید رابطه میان a_n و n را مشخص کنیم:

$$\text{اولین جمله} \quad n=1 \rightarrow a_1 = 3^1$$

$$\text{دومین جمله} \quad n=2 \rightarrow a_2 = 9 = 3^2$$

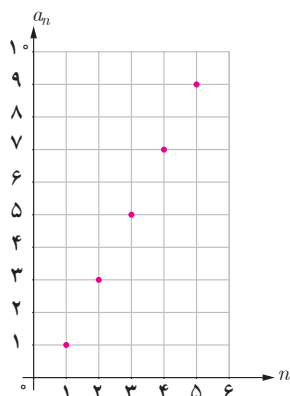
$$\text{سومین جمله} \quad n=3 \rightarrow a_3 = 27 = 3^3$$

پس، ضابطه تابع به صورت $a_n = 3^n$ به دست می آید.

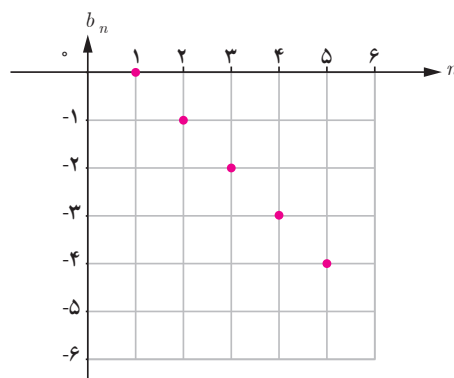
رسم نمودار دنباله

با توجه به تعریف دنباله به عنوان تابعی با دامنه اعداد طبیعی، نمودار آنها را نیز می‌توان رسم کرد:

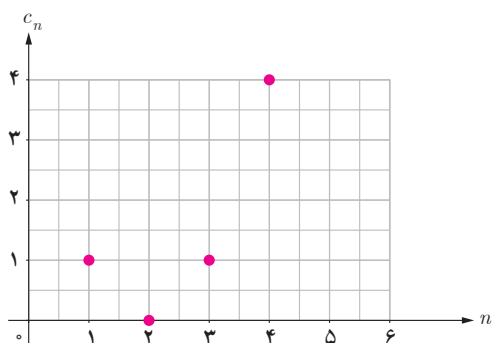
$$a_n = 2n - 1 \quad 1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots$$



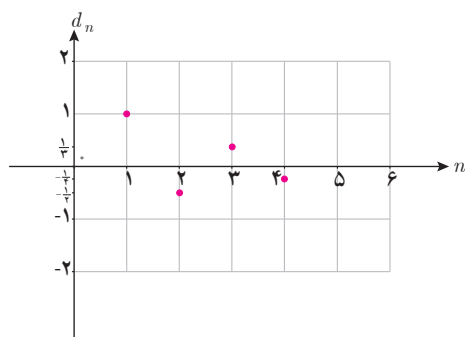
$$b_n = 1 - n \quad 0, -1, -2, -3, -4, \dots$$



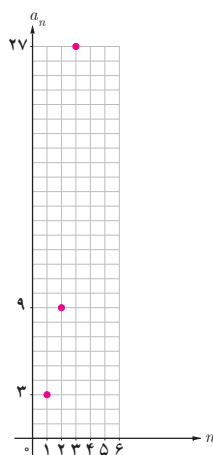
$$c_n = (n - 2)^2 \quad 1, 0, 1, 4, \dots$$



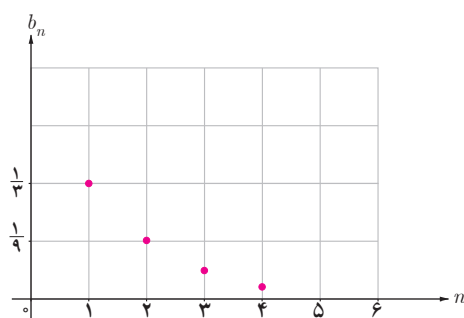
$$d_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots$$



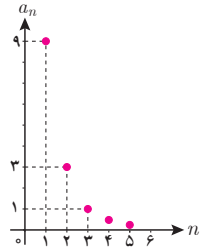
$$e_n = 3^n$$



$$f_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$



جدول زیر را کامل کنید.

جملات دنباله	فرمول بازگشتی	ضابطه دنباله	نمودار دنباله
$9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots$	$a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n$ $a_1 = 9$	$a_n = 3^{3-n}$	
	$a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n$ $a_1 = 1$		
		$a_n = 2n + 1$	
	$a_{n+1} = a_n + n$ $a_1 = 1$		
$1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \dots$			
$-1, -4, -9, -16, \dots$			
	$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ $a_1 = a_2 = 1$ *		

* دنباله فوق را دنباله فیبوناچی می نامند.

تمرین

۱. برای محاسبه قبض آب^۱ (آب بها) هر واحد مسکونی در شهر تهران ابتدا میانگین مصرف هر واحد مسکونی محاسبه می شود و بر اساس آن «طبقه مصرفی» واحد مسکونی با توجه به «جدول ۱» تعیین می گردد. آنگاه به کمک رابطه زیر، آب بها محاسبه می شود:

هزینه هر متر مکعب با توجه به طبقه مصرف $\times$ میانگین مصرف = آب بها^۱

جدول ۱. محاسبه آب بها بر اساس طبقات مصرف در استان تهران

هزینه (ریال)	طبقات مصرف (متر مکعب)	هزینه (ریال)	طبقات مصرف (متر مکعب)
۸/۴۹۶	$25 \leq x < 30$	۱/۴۱۹	$0 \leq x < 5$
۱۱/۵۸۰	$30 \leq x < 35$	۲/۱۲۳	$5 \leq x < 10$
۱۵/۴۴۴	$35 \leq x < 40$	۲/۸۲۷	$10 \leq x < 15$
۳۳/۴۶۲	$40 \leq x < 50$	۳/۷۰۳	$15 \leq x < 20$
۶۶/۹۲۴	$x \geq 50$	۵/۴۰۰	$20 \leq x < 25$

الف) نمودار «طبقه مصرف – آب بها» جدول بالا را رسم کنید و ضابطه و دامنه و برد تابع را به دست آورید.

ب) اگر میانگین مصرف یک واحد مسکونی^۲ در تهران در یک ماه $20/49 m^3$ باشد، سطح زیر منحنی نمودار چه تابعی، آب بها را مشخص می کند؟

۲. اگر تابع f مدل ریاضی هر کدام از مسائل زیر باشد، دامنه هر کدام از آنها را مشخص کنید.

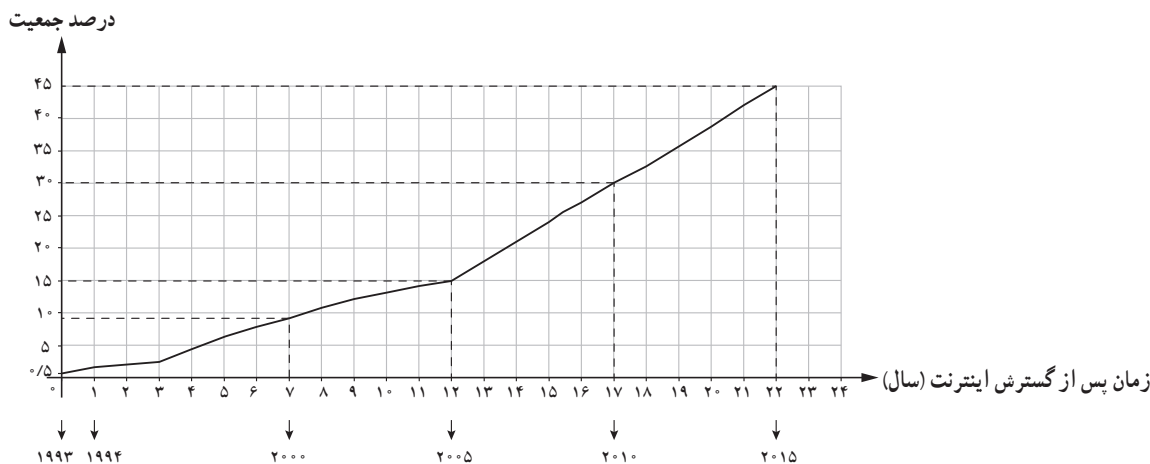
- الف) کاهش دمای هوا با دور شدن از سطح زمین تا ارتفاع ۱۵ کیلومتر
☐ $\mathbb{N}$ ☐ $\mathbb{R}$
- ب) میزان استفاده دانش آموزان یک مدرسه از اینترنت در هر ساعت
☐ $\mathbb{N}$ ☐ $\mathbb{R}$
- ج) حجم مکعبی به ضلع x
☐ $\mathbb{N}$ ☐ $\mathbb{R}$
- د) میزان تغییرات سالانه سطح دریاچه ارومیه در دهه اخیر
☐ $\mathbb{N}$ ☐ $\mathbb{R}$
- ه) میزان مصرف ماهیانه آب در یک واحد مسکونی
☐ $\mathbb{N}$ ☐ $\mathbb{R}$

۱. اطلاعات بالا از پایگاه www.tpww.ir استخراج شده است. در جدول واقعی، پس از محاسبه حاصل ضرب گفته شده بر اساس طبقه مصرف عددی ثابت از عدد به دست آمده، کم می شود.

۲. با توجه به میانگین مصرف آب در هر واحد مسکونی، مشترکان تقریباً $\frac{1}{3}$ هزینه واقعی تولید آب را می پردازند. هزینه آب در مقایسه با کشورهای منطقه و بسیاری از کشورهای جهان در ایران بسیار پایین است.

۳. الگوی مصرف برای هر واحد مسکونی در تهران $18 m^3$ است.

۳. نمودار زیر درصد جمعیتی از سراسر جهان را نشان می‌دهد که از ۱۹۹۳ که سال گسترش اینترنت در دنیاست، از اینترنت استفاده کرده‌اند^۱:



الف) اگر $f(n)$ درصد استفاده‌کنندگان از اینترنت در جهان، n سال پس از گسترش اینترنت باشد، به کمک نمودار داده شده مقادیر $f(1)$ و $f(7)$ را مشخص کنید و معنای آن را توضیح دهید.

ب) با توجه به مدل خطی استفاده‌کنندگان از اینترنت از سال ۲۰۰۵ تا ۲۰۱۵، با به‌دست آوردن ضابطه تابع خطی، در سال ۲۰۲۰ درصد استفاده‌کنندگان از اینترنت در جهان چقدر خواهد بود؟

۴. اگر جملات یک دنباله از قانون تابع خطی $y = 4x - 1$ پیروی کنند، با توجه به دامنه دنباله:

الف) نمودار تابع را رسم کنید و نمودار دنباله را روی نمودار تابع مشخص کنید.

ب) نمایش تابعی دنباله و نیز رابطه بازگشتی دنباله را بنویسید. شیب خط چه ارتباطی با رابطه بازگشتی دنباله دارد؟

۵. با توجه به دنباله‌های $a_n = 3^n$ ، $b_n = (-\frac{1}{3})^{n+1}$ ، $c_n = \frac{1}{3^{n-1}}$ ، $d_n = n^2 - 1$ ، حاصل عبارت‌های خواسته شده را به‌دست آورید.

الف) $a_7 + b_1$

ب) $c_7 - d_1$

ج) $b_7 + d_7$

۶. جمله پنجم دنباله‌های بازگشتی زیر را مشخص کنید.

الف) $a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n$ ، $a_1 = -2$

ب) $a_{n+1} = \frac{1}{1 + a_n}$ ، $a_1 = 1$

ج) $a_{n+3} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$ ، $a_1 = a_2 = a_3 = 1$

د) $a_{n+1} = a_n + (-1)^n$ ، $a_1 = 1$

۷. جدول زیر را کامل کنید.

دنباله دو ضابطه‌ای	ضابطه دنباله	رابطه بازگشتی	جملات دنباله
			۵, ۸, ۱۱, ۱۴, ۱۷, ...
			۴, ۱, ۴, ۱, ۴, ۱, ...
			۱, $\frac{1}{2}$, ۳, $\frac{1}{4}$, ۵, $\frac{1}{6}$, ...
			$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$

۸. شش جمله اول دنباله بازگشتی $a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n & n \text{ زوج} \\ 3a_n + 1 & n \text{ فرد} \end{cases}$ را برای هر کدام از حالت‌های زیر بنویسید.

الف) $a_1 = 11$

ب) $a_1 = 25$

۹. نمودار دنباله‌های زیر را برای $n \leq 5$ رسم کنید.

الف) $a_n = -\frac{1}{2}n + 3$

ب) $a_n = (-\frac{1}{2})^n$

ج) $a_{n+1} = \frac{1}{a_n} \quad a_1 = 2$

د) $a_n = \begin{cases} 1 & n \text{ زوج} \\ \frac{1}{n} & n \text{ فرد} \end{cases}$

۱۰. محاسبه جذر اعداد در تمدن بابل – با نوشتن جملات دنباله بازگشتی زیر می‌توانیم به طرز شگفت‌انگیزی به جذر عدد k یعنی $\sqrt{k}$ نزدیک شویم.

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{k}{a_n} \right) \quad a_1 = k$$

این روش منسوب به تمدن بابل (واقع در شرق ایران و در بین‌النهرین) است.

به کمک دنباله بازگشتی بالا، اگر a_3 را تقریبی برای $\sqrt{k}$ در نظر بگیریم، حاصل اعداد زیر را مشخص کنید.

الف) $\sqrt{2}$

ب) $\sqrt{3}$

ج) $\sqrt{5}$

آیا این روش مزیتی بر استفاده از ماشین حساب دارد؟ چرا؟

۱۱. جملات دنباله بازگشتی $a_1=1$ ، $a_{n+1}=a_n+(n+1)$ رأس کدام یک از الگوهای زیر را مشخص می کنند؟



۱۲. مطابق گزارش سازمان محیط زیست، به دلیل ورود پَس مانده های صنعتی کارخانه ها به یک دریاچه، 25° تن فاضلاب صنعتی به این دریاچه وارد شده است. محیط زیست دریاچه سالیانه 1° ٪ فاضلاب صنعتی را به صورت طبیعی خنثی و بی اثر می کند. سازمان محیط زیست با وضع قوانین جدید میزان ورودی فاضلاب صنعتی به دریاچه را به 15 تن در سال کاهش داده است. اگر $P_1=25^\circ$ میزان آلودگی فعلی دریاچه باشد، با نوشتن یک رابطه بازگشتی، میزان مواد آلوده صنعتی را بعد از دو سال و پنج سال محاسبه کنید.



دریاچه گهر، لرستان

بازی و ریاضی

آیا می توانید ده جمله اول دنباله زیر را مشخص کنید؟

$$a_n = a_{n-a_{n-1}} + a_{n-a_{n-2}} \quad a_1 = a_2 = 1$$

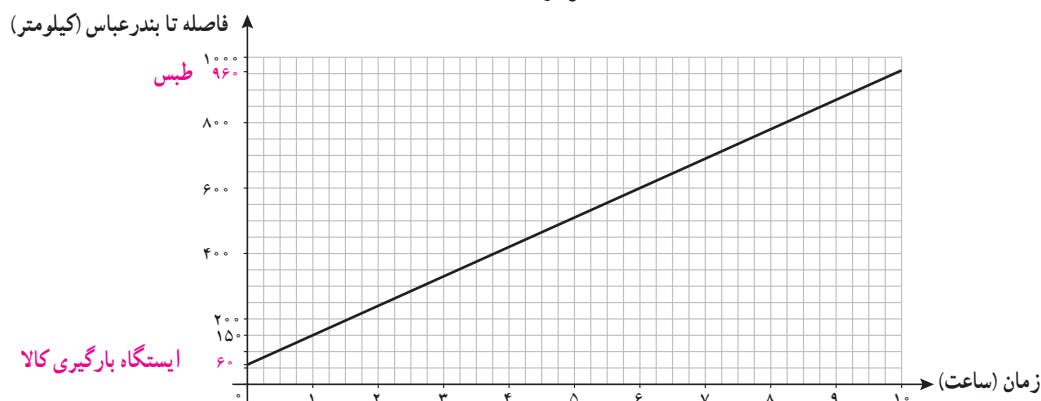
درس ۲

دنباله‌های حسابی

فعالیت

یک قطار باری از ایستگاهی در ۶۰ کیلومتری بندرعباس بارگیری کرده است و مطابق نمودار مکان – زمان زیر با سرعتی ثابت به سمت طبس حرکت می‌کند.

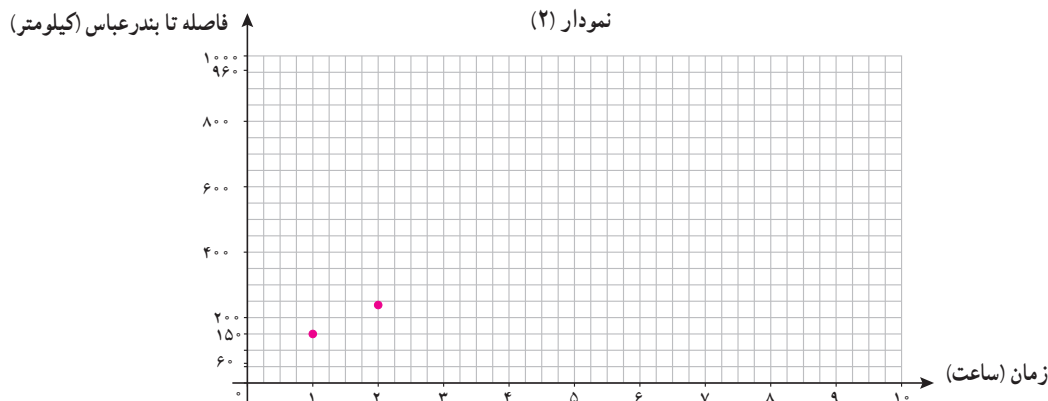
نمودار (۱)



الف) ضابطه تابع و دامنه و برد آن را به دست آورید.

ب) اگر راهبر این قطار به دلایلی مانند رعایت سرعت مجاز و امنیت قطار موظف باشد پس از حرکت، مسافت طی شده در هر «یک ساعت» را به مرکز بندرعباس گزارش دهد، این نقاط را به کمک نمودار (۱) در نمودار (۲) کامل کنید.

نمودار (۲)

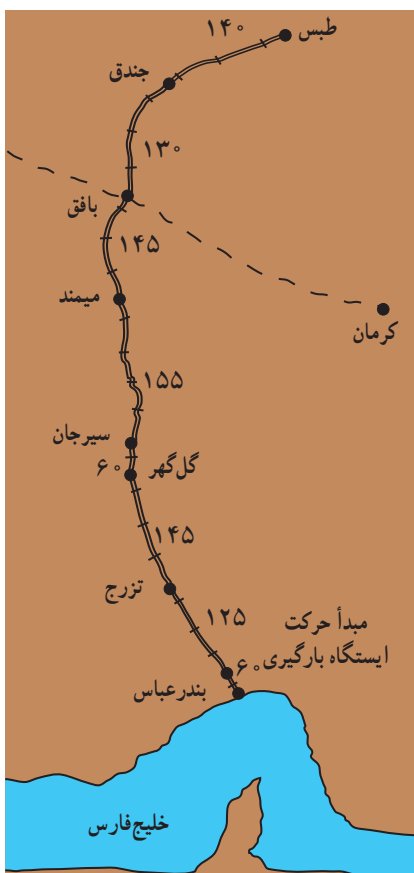


ج) ضابطه و دامنه و برد نمودار (۲) چه تفاوتی با نمودار (۱) دارند؟

(د) جدول ۱ را به کمک نقشه داده شده کامل کنید.

جدول ۱

نام دو ایستگاه متوالی	مسافت	فاصله تا بندرعباس
ایستگاه بارگیری - تزرچ	۱۲۵	$۶۰ + ۱۲۵ = ۱۸۵$
تزرچ - گل گهر	۱۴۵	
گل گهر - سیرجان		
سیرجان - میمند		
میمند - بافق		
باقق - جندق		
جندق - طبس		



(ه) با فرض اینکه مسافت طی شده قطار n ساعت پس از ترک ایستگاه بارگیری باشد، جدول ۲ را به کمک نمودار (۲) کامل کنید.

جدول ۲

$n = ۱$	$n = ۲$	$n = ۳$	$n = ۴$	$n = ۵$
$a_1 = ۶۰ + ۹۰ = ۱۵۰$	$a_2 = a_1 + ۹۰$ $= ۱۵۰ + ۹۰ = ۲۴۰$	$a_3 = a_2 + ۹۰$ $= \dots\dots\dots$		
$n = ۶$	$n = ۷$	$n = ۸$	$n = ۹$	$n = ۱۰$

(و) با مقایسه جدول های ۱ و ۲، کدام ایستگاه ها محل تماس راهبر قطار بوده اند؟ چرا؟

ز) با توجه به جدول ۲، ابتدا تساوی‌های زیر را کامل کنید.

$$\begin{cases} a_3 = a_2 + \dots\dots\dots \\ a_3 = a_1 + \dots\dots\dots \times 9^0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_{11} = a_{10} + \dots\dots\dots \\ a_{11} = a_1 + \dots\dots\dots \times 9^0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_5 = a_4 + \dots\dots\dots \\ a_5 = a_1 + \dots\dots\dots \times 9^0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_8 = a_2 + \dots\dots\dots \times 9^0 \\ a_8 = a_5 + \dots\dots\dots \times 9^0 \end{cases}$$

از روابط بالا می‌توان نتیجه گرفت :

$$(۱) \quad a_n = a_1 + (\dots\dots\dots) \times 9^0$$

$$a_n - a_{n-1} = \dots\dots\dots \text{ (رابطه بازگشتی)}$$

$$a_n - a_m = (\dots\dots\dots) \times 9^0$$

ح) کدام ویژگی دنباله a_n باعث برقراری روابط بالا شده است؟
 ط) رابطه (۱) در قسمت «ز» چه ارتباطی با ضابطه تابع به دست آمده در قسمت «الف» دارد؟

دنباله حسابی^۱

نکته قابل توجه در دنباله مطرح شده در فعالیت، یعنی دنباله «مسافت طی شده در هر گزارش»، این است که افزایش جملات دنباله منظم است؛ به گونه‌ای که براساس هر دو جمله متوالی، جمله بعدی مشخص می‌شود. چنین دنباله‌هایی که هر جمله آنها به جز جمله اول، از اضافه شدن یک عدد ثابت به جمله پیشین به دست می‌آید، دنباله‌های «حسابی» نامیده می‌شوند.

یک دنباله حسابی، دنباله‌ای به صورت :

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, \dots$$

است که در آن a جمله اول و عدد ثابت d «اختلاف مشترک» جملات دنباله است. جمله n ام این دنباله با رابطه $a_n = a_1 + (n-1)d$ معرفی می‌شود.
 « d » را اختلاف مشترک^۲ دنباله حسابی می‌نامند؛ زیرا همه جملات دنباله در یک ویژگی مشترک اند و آن اینکه اختلاف آنها مقدار ثابت d است.

۱. Arithmetic Sequence

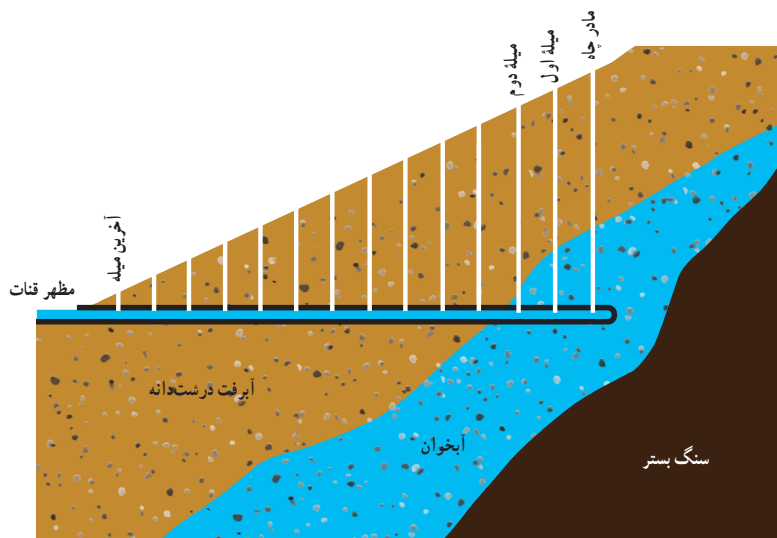
۲. Common Difference

کار در کلاس

۱. ضابطه بازگشتی دنباله حسابی با جمله اول a_1 و اختلاف مشترک d را مشخص کنید.
۲. مثبت یا منفی یا صفر بودن «اختلاف مشترک»، d ، چه تأثیری در جملات دنباله حسابی دارد؟
۳. جدول زیر را کامل کنید.

جمله اول	اختلاف مشترک	پنج جمله اول	a_n
a	d		
۲	۳	۲, ۵, ۸, ۱۱, ۱۴	$a_n = 2 + 3(n - 1)$
		۴, ۱, -۲, -۵, -۸	
۴	$-\frac{1}{2}$		
			$a_n = -3 + 5(n - 1)$

۴. قنات یا کاریز، راه آب یا کانالی است که در زیرزمین کنده شده است تا آبی را که از حفر چاه اصلی (نخستین چاه) به نام «مادرچاه» به دست آمده است، به منطقه‌ای دیگر انتقال دهد. برای حفر کانال، مطابق شکل زیر، از چاه‌های کمکی به نام «میله» استفاده می‌کنند. میله‌ها برای رساندن اکسیژن و نیز کمک به مقتی^۱ در خارج کردن خاک‌های حاصل از حفر کانال و بعدها برای کمک به لایروبی و تعمیر قنات حفر می‌شوند.



در یک منطقه، مقتی پس از حفر چاه در عمق ۳۰ متری سطح زمین، به آب زیرزمینی دست یافته و در این عمق شروع به حفر کانال قنات کرده است. با توجه به شیب ثابت زمین و حفر چاه‌های کمکی در فاصله‌های یکسان از هم، عمق میله اول ۲۹/۵ متر و میله دوم ۲۹ متر بوده و به همین ترتیب، عمق میله‌ها کاهش یافته است. اگر عمق آخرین میله ۱/۵ متر باشد، این مقتی در مجموع چند چاه حفر کرده است؟

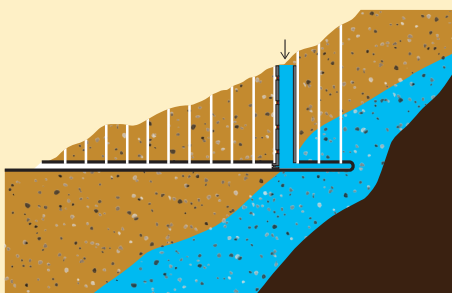
۱. مقتی: به کسی می‌گویند که کانال را حفر می‌کند.

اگرچه به نظر می‌رسد مدیریت منابع طبیعی، رشته‌ای نوپا، مهم و حیاتی در بسیاری از دانشگاه‌های دنیاست، با نگاهی به تاریخ گذشته سرزمینمان متوجه می‌شویم که چگونه ایرانیان از هزاران سال پیش با فرهنگ ساختن کاریز و قنات، به استفاده بهینه از منابع طبیعی توجه داشته‌اند. چنان که در سفرنامه ناصر خسرو به قنات گناباد اشاره شده است؛ قناتی با عمق مادر چاه بیش از سیصد متر و ارتفاع یک برج ۱۰۰ طبقه و با عمری سه هزار ساله.

حفر صدها چاه و ایجاد هزاران متر کانال قنات برای انتقال آب حتی با وسایل امروزی، آن هم در مسیرهای خشک و کویری و در گرمای طاقت‌فرسا، کاری بس عظیم و بی‌همتاست که نه تنها نشان از صبر و شکیبایی دارد، بلکه شاید بیش از هر چیز بیانگر عشق نیاکان ما به زندگی و تلاش برای تداوم آن در نسل‌های آینده‌شان است.

انسان‌هایی که معضل عظیم بی‌آبی را نه تنها علتی برای کوچ نمی‌دانستند، بلکه با دانش و تفکر و هوشمندی و برنامه‌ریزی بلندمدت، آرام آرام ده‌ها هزار متر مکعب خاک را از اعماق زمین جا به جا کردند تا دسترسی به منبع حیات را برای نسل‌های بعدی‌شان فراهم سازند. تنها با نگاه به یکی از قنات‌های موجود در ایران، مانند قنات زارچ یزد که برای ایجاد آن بیش از هشتاد هزار متر کانال و چاه در دل کویر حفر شده است و با دانستن اینکه یک مقنی شاید در طول یک روز بیش از دو یا سه متر حفاری انجام نمی‌داده است، مشخص می‌شود که حتی با یک گروه حفاری، اتمام این قنات به چندین ده سال کار بی‌وقفه نیاز داشته است. کاری دشوار که هر روز و هر لحظه آن جدال مستقیم با مرگ بوده است؛ زیرا با ریزش خاک به‌ویژه در زمین‌های سست کویری و در عمق چندین ده متر از سطح زمین، کمترین احتمالی برای زنده ماندن مقنی قابل تصور نبوده است. این گونه بوده است که این افراد کار هر روزه خود را با لباس سفید و اشهدگویان شروع می‌کرده‌اند.

فرهنگ ایجاد کاریز افزون بر موارد فوق، نشان از دیگر جنبه‌های هوشمندی ایرانیان نیز دارد. نخست، با ایجاد شیبی ملایم هنگام حفر کانال و به کمک گرانز زمین نیازی به وجود پمپ برای انتقال آب نبوده است. با توجه به نبود وسایل مهندسی



امروزی برای جهت‌یابی و تعیین زاویه حفر، انجام دادن این عمل در گذشته بسیار دشوار بوده است. دوم، فرهنگ ایجاد کاریز، ذخیره‌سازی آب در عمق زمین و درون چاه‌ها را ممکن می‌ساخته است. از آن رو که در سدهای آبی مقادیر زیادی از آب در معرض خورشید تبخیر می‌شود، پیشینیان ما با بستن آب در انتهای یکی از میله چاه‌ها، آب را توسط چاه‌های قنات در اعماق زمین از تابش مستقیم آفتاب حفاظت می‌کرده‌اند؛ به بیانی دیگر، قنات‌ها سدهایی زیرزمینی بوده‌اند^۱.

در گزارش سازمان خواربار و کشاورزی ملل متحد (فائو) با عنوان «اهمیت میراث سیستم‌های سنتی کشاورزی» سال ۲۰۱۴ ضمن به رسمیت شناختن این میراث در سطح جهانی و حفظ آن جهت نیل به توسعه پایدار، نوشته شده است: "قدمت فناوری و دانش سیستم آبیاری سنتی در ایران، و حفر کاریز، دست‌کم به ۸۰۰ سال پیش از میلاد می‌رسد و نزدیک به سه هزاره زنده مانده است. شبکه آبیاری سیستم قنات توانسته است به طور پایدار، امنیت غذایی و معیشت خانوارهای کشاورزان را فراهم آورد."

بیش از ۴۰ هزار قنات در ایران منابع پایدار با ارزشی هستند که توجه دوباره به آنها شاید بخشی از راه‌حل سازگاری با شرایط اقلیمی کشورمان در جهت تأمین منابع آب باشد؛ منابعی که امروز برای ایجاد دوباره آنها نیاز به هزاران میلیارد تومان سرمایه و هزاران ساعت کار انسانی است. میراثی با ارزش که نیاکانمان با شکیبایی و عشق برای ما به یادگار گذاشته‌اند.

۱. طبق گزارش‌های رسمی، میانگین بارش جوی کشور ۴۱۳ میلیارد متر مکعب است که نزدیک به ۲۹۶ میلیارد متر مکعب آن در سال تبخیر می‌شود. اگر تقویت منابع آب زیرزمینی و ذخیره‌سازی آن توسط قنات‌ها تنها ده درصد از تبخیر آب را کاهش دهد، به طور میانگین نزدیک به ۳۰ میلیارد متر مکعب به حجم آب مورد استفاده افزوده می‌شود که عددی بسیار چشمگیر است.

فعالیت

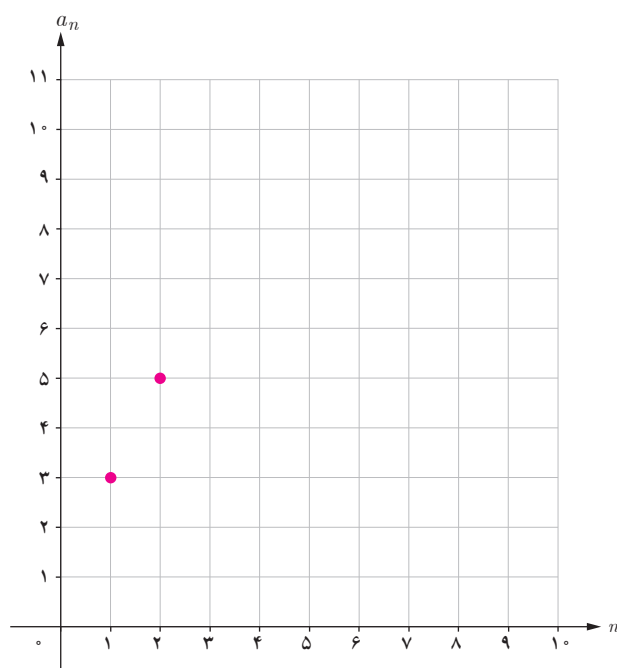
دنباله حسابی $a_n = 3 + 2(n-1)$ را در نظر بگیرید.

الف) با محاسبه سه جمله دیگر دنباله، نمودار زیر را کامل کنید.

ب) معادله خطی را که از دو نقطه اول و دوم می‌گذرد، به دست آورید. آیا نقاط دیگر دنباله در ضابطه خط به دست آمده صدق

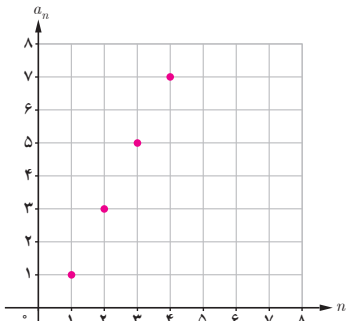
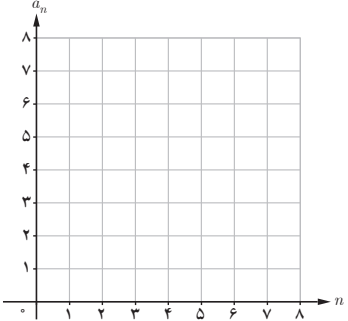
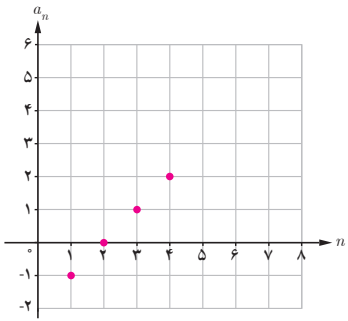
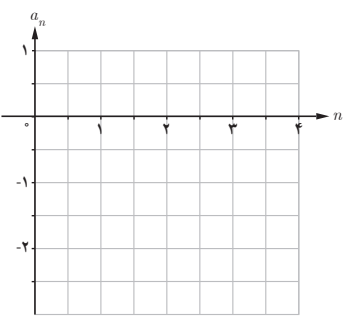
می‌کنند؟

ج) شیب خط به دست آمده چه ارتباطی با d (اختلاف مشترک دنباله حسابی) دارد؟



اگر جمله عمومی یک دنباله حسابی را بنویسیم، یک معادله خط خواهد شد. هر دنباله حسابی یک تابع خطی است که شیب خط، همان اختلاف مشترک جملات دنباله، یعنی d است و به عکس، دنباله ساخته شده از یک تابع خطی نیز جملات یک دنباله حسابی را مشخص می‌کند.

جدول زیر را کامل کنید.

ضابطهٔ تابع	دنبالهٔ ساخته شده از تابع	چهار جملهٔ اول دنباله	نمودار دنباله
$y = 2x - 1$	$a_n = 2n - 1$	۱, ۳, ۵, ۷	
$y = -x + 4$			
			
		$-2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}$	

فعالیت



پس از مصرف بعضی از داروها، مانند آسپرین، سطح دارو در خون با سرعتی ثابت صفر می‌شود.^۱ اگر شخصی که سابقهٔ سکتۀ قلبی دارد با مصرف یک قرص آسپرین، ۲۵۰ میلی‌گرم دارو به بدنش وارد شود و پس از پایان هر یک ساعت ۱۵ میلی‌گرم دارو در سطح خونس کاهش یابد:

الف) چند ساعت پس از مصرف دارو، سطح آن در بدنش ۱۳۰ میلی‌گرم می‌شود؟



ب) نمودار «سطح دارو در بدن – زمان» مسئلهٔ بالا را رسم کنید.

ج) اگر پس از پنج ساعت از مصرف دارو این شخص قرص دیگری مصرف کند، پس از چند ساعت سطح دارو در بدن او ۱۳۰ میلی‌گرم خواهد شد؟

کار در کلاس

درآمد کارمندی در یک شرکت خصوصی، ماهیانه ۶۰۰۰۰/۰۰۰ تومان است که ۱۰٪ آن به عنوان مالیات کسر می‌شود. اگر این شخص برای هر ساعت اضافه کاری ۱۲۰ هزار تومان از شرکت دریافت کند و بابت این اضافه کاری مالیات پرداخت نکند، پس از روزانه چند ساعت اضافه کاری دریافتی خالص ماهیانهٔ او ۶۳ میلیون تومان خواهد بود؟ (ماه را ۳۰ روزه در نظر بگیرید.) با توجه به فرض مسئله مبنی بر دریافت ۱۲۰ هزار تومان اضافه کاری برای هر یک ساعت کار، میزان دریافتی این شخص پس از k ساعت اضافه کاری از یک دنبالهٔ عددی پیروی می‌کند. بنابراین، اگر a_n میزان دریافتی شخص پس از یک ساعت اضافه کاری باشد، جملهٔ آخر دنباله باید برابر با مبلغ تومان باشد؛ یعنی در رابطهٔ

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

باید

۱. این داروها را در داروشناسی Zero Order Kinetics می‌نامند.

مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی

در فعالیت «محاسبه تعداد چاه‌های قنات» مشخص شد که قنات موردنظر ۵۸ چاه دارد که عمق آنها دنباله حسابی $1/5, \dots, 29, 29/5, 30$ را تشکیل می‌دهد. فرض کنید یک مقنی در هر روز بتواند ۲ متر چاه حفر کند. می‌خواهیم بدانیم این مقنی به چند روز کار نیاز دارد تا مجموع چاه‌های گفته شده را حفر کند.

الف) ابتدا باید بدانیم مجموع ۵۸ چاه حفر شده چند متر است.

برای این کار، مجموع عمق چاه‌ها را یک بار از عمیق‌ترین تا کم عمیق‌ترین چاه و بار دیگر از کم عمیق‌ترین تا عمیق‌ترین چاه با یکدیگر جمع می‌کنیم:

$$\begin{aligned} S_{58} &= 30 + 29/5 + 29 + \dots + 2/5 + 2 + 1/5 \\ S_{58} &= 1/5 + 2 + 2/5 + \dots + 29 + 29/5 + 30 \\ \hline 2S_{58} &= 31/5 + 31/5 + \dots + 31/5 + 31/5 \end{aligned}$$

$$2S_{58} = 58 \times 31/5 \Rightarrow S_{58} = \frac{58 \times 31/5}{2} \Rightarrow S_{58} = 913/5 \text{ m}$$

ب) با توجه به اینکه مقنی روزانه ۲ متر چاه حفر می‌کند:

$$\text{روز} = \frac{913/5}{2} = 456/75 = \text{تعداد روز برای پایان کار}$$

بنابراین، مقنی بدون حتی یک روز استراحت تقریباً به ۱۵ ماه زمان نیاز دارد تا قنات موردنظر را تحویل دهد.

جمع کردن جملات یک دنباله به دو صورت محاسبه مجموع a_1 تا a_n و محاسبه مجموع a_n تا a_1 برای تعیین S ، روش جالبی است که می‌توانیم به کمک آن، مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی را به دست آوریم:

مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی $a_n = a_1 + (n-1)d$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \quad \text{یا} \quad S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

رابطه بالا را در محاسبه مجموع چاه‌های حفر شده می‌توانیم مشاهده کنیم؛ زیرا:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{58} = \frac{58}{2}(30 + 1/5) = 913/5$$

کار در کلاس

۱. مجموع دنباله‌های حسابی زیر را به دست آورید.

الف ۱۹۹ و و ۹ و ۴ و ۱- (الف)

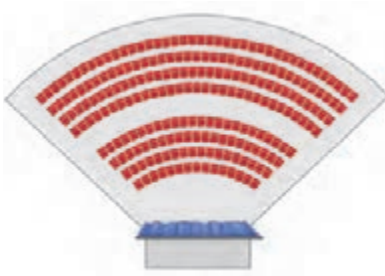
ب) $a_{n+1} = 5 + a_n$, $a_1 = -2$ $S_{10} = ?$

(راهنمایی: ابتدا به کمک رابطه بازگشتی، جملات دنباله را مشخص کنید.)

۲. مجموع سی جمله اول اعداد فرد را به دست آورید.

$$a_1 = 1 \quad a_n = a_1 + (n-1)d = \dots\dots$$

$$S_{r_0} = \dots\dots (a_1 + a_{r_0})$$



۳. یک طراح داخلی برای یک سالن سینما در ردیف اول ۱۵ صندلی، در ردیف دوم ۱۸ صندلی و در ردیف سوم ۲۱ صندلی مشخص کرده است. اگر صندلی‌های هر ردیف با همین نظم اضافه شوند، برای داشتن سالنی با ۸۷ صندلی باید چند ردیف صندلی داشته باشیم؟

با توجه به معلوم بودن $S_n = 87$ برای به دست آوردن n یعنی تعداد ردیف‌ها، از رابطه

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

با جای گذاری $d = \dots\dots$ در رابطه بالا $n = \dots\dots$ به دست می‌آید.

تمرین

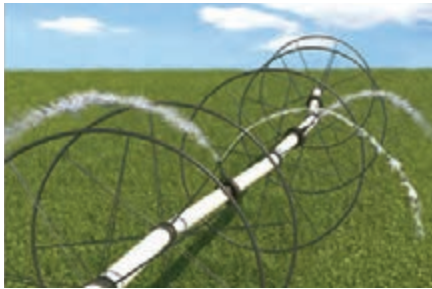
۱. با نوشتن جملات رابطه‌های بازگشتی، مشخص کنید کدام یک دنباله حسابی است.

الف) $a_{n+1} = \frac{1}{a_n}$ $a_1 = 2$ ب) $a_{n+1} = a_n + 5$ $a_1 = -1$

ج) $a_{n+1} = 5a_n + 1$ $a_1 = -1$ د) $a_{n+1} - a_n = n$

۲. در یک دنباله حسابی، جمله اول برابر ۵- و اختلاف مشترک برابر ۸ است. کدام جمله دنباله برابر ۵۵۵ است؟

۳. یازدهمین جمله یک دنباله حسابی ۵۲ و جمله نوزدهم آن ۹۲ است. جمله سی‌ام این دنباله را مشخص کنید.



۴. برای کاهش مصرف آب در کشاورزی یک منطقه، از آبیاری قطره‌ای استفاده می‌شود؛ به این صورت که یک میله که در آن سوراخ‌هایی برای پخش آب تعبیه شده است، به کمک چرخ‌هایی (مطابق شکل مقابل) حول یک محور می‌چرخد. اگر فاصله اولین چرخ تا موتور ۳ متر و بعد از آن، فاصله هر چرخ تا چرخ بعدی ۵ متر باشد و در کل، ۱۲ چرخ روی میله قرار داشته باشد، با این وسیله چه مساحتی آبیاری می‌شود؟ (آخرین چرخ دقیقاً در انتهای میله قرار دارد.)

۵. در یک کارخانه سنگ‌بری برای صیقل دادن سنگ‌ها از یک صفحه به وزن 12500 گرم استفاده می‌شود. اگر با توجه به مصرف هفتگی به‌طور میانگین 1875 گرم از وزن صفحه کم شود، پس از شش هفته استفاده مداوم وزن صفحه چقدر است؟

۶. میان دو عدد a و b و n عدد را به‌گونه‌ای قرار می‌دهیم که جملات دنباله از a تا b یک دنباله حسابی تشکیل دهند. ثابت کنید

اختلاف مشترک جملات دنباله از رابطه $d = \frac{b-a}{n+1}$ به‌دست می‌آید. (توجه داشته باشید که تعداد کل جملات $(n+2)$ جمله است.)

۷. براساس رابطه به‌دست‌آمده در مسئله ۶، سه عدد را به‌گونه‌ای میان اعداد 10 و 18 قرار دهید که یک دنباله حسابی تشکیل دهند.

۸. مجموع عددهای زیر را به‌دست آورید.

۱۳ و و ۸۱ و ۸۵ و ۸۹ (ب)

۴۰۱ و و ۹ و ۵ و ۱ (الف)



۹. باغداران برای چیدن میوه‌ها از نردبان‌هایی استفاده می‌کنند که بخشی از آنها که روی زمین قرار می‌گیرد، برای تعادل بیشتر، عرض بیشتری دارد و انتهای نردبان که به درخت تکیه داده می‌شود، برای جابه‌جایی آسان‌تر و تکیه‌گاه بهتر، عرض کمتری دارد.

اگر عرض نخستین پله این نردبان ۱۲۵ سانتی‌متر و عرض آخرین پله آن ۴۵ سانتی‌متر در نظر گرفته شود و هر پله ۱۰ سانتی‌متر کوتاه‌تر از پله پیشین باشد، این نردبان چند پله خواهد داشت؟ برای ساخت پله‌ها به چند متر چوب احتیاج خواهیم داشت؟

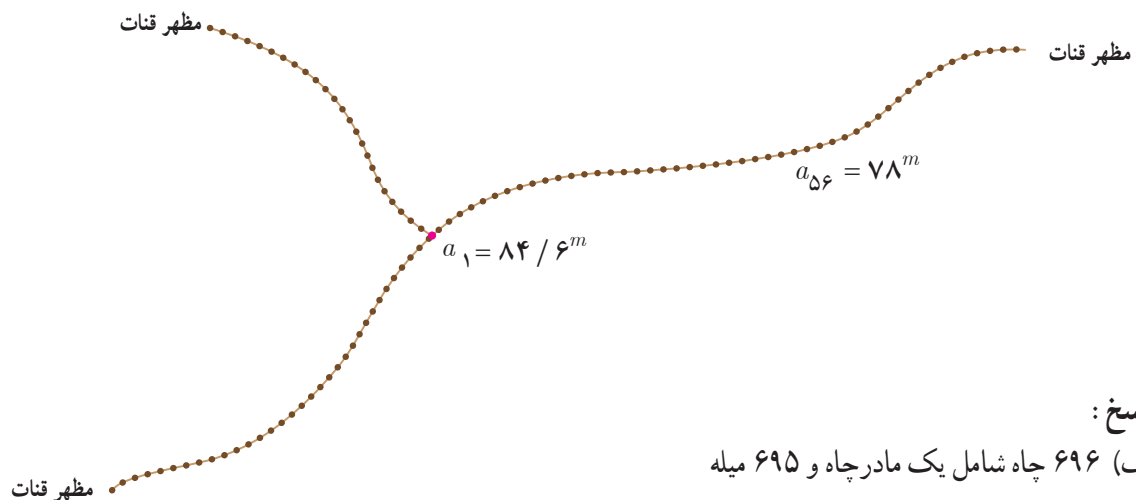
۱۰. ارزش امروزی قنات زارچ، طولانی‌ترین قنات ایران — عمق مادرچاه قنات زارچ $۸۴/۶$ متر است که از آن سه شاخه قنات خارج شده است. اگر تعداد میله‌های هر سه شاخه قنات برابر و عمق پنجاه و ششمین چاه (میله ۱۵۵ام) ۷۸ متر باشد، با فرض اینکه شیب زمین ثابت و فاصله میان هر دو میله یکسان باشد و عمق آخرین چاه قنات (میله) ۱۲۰ سانتی‌متر در نظر گرفته شود:

الف) هر شاخه قنات دارای چند میله است؟

ب) مجموع طول چاه‌های حفر شده در این مسیر چقدر است؟ مجموع طول چاه‌های حفر شده در کل قنات چقدر است؟

ج) اگر میانگین هزینه حفریک متر چاه (شامل حفر، مصالح و دیوارچینی) ۲۵ هزار تومان باشد، هزینه حفریک چاه‌های قنات در حال حاضر چقدر است؟

د) طبق محاسبات مهندسی، در قنات زارچ در مجموع طول کل کانال قنات ۷۱ کیلومتر است. با توجه به میانگین هزینه ۳۵ هزار تومان برای حفریک کانال قنات، ارزش کل قنات زارچ چقدر است؟ (راهنمایی: a_n را عمق چاه n ام تا کانال قنات و a_1 را عمق مادرچاه در نظر بگیرید.)



پاسخ:

الف) ۶۹۶ چاه شامل یک مادرچاه و ۶۹۵ میله

ب) مجموع طول چاه‌ها در یک مسیر $۲۹۸۵۸/۴$ متر و مجموع طول چاه‌ها در کل قنات ۸۹۴۰۶ متر

ج) $۲۲,۳۵۱,۵۰۰,۰۰۰$ تومان

د) $۴۷,۲۰۱,۵۰۰,۰۰۰$ تومان

فصل ۳- الگوهای غیر خطی

دنباله هندسی

درس ۱

ریشه n ام و توان گویا

درس ۲

تابع نمایی

درس ۳



توابع نمایی در مدل سازی بسیاری از پدیده های واقعی از جمله، رشد جمعیت، زوال مواد رادیو اکتیو و استفاده از آن در تعیین طول عمر فسیل ها، بیماری های واگیردار، شدت اصوات و زلزله ها کاربرد دارد.

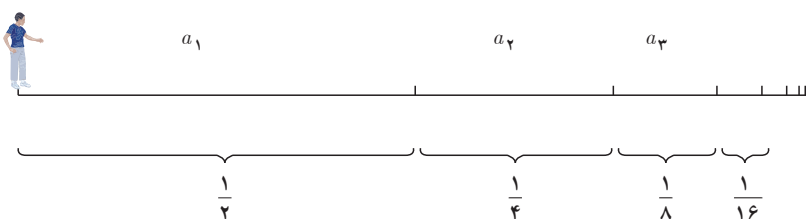
درس ۱

دنباله هندسی^۱

آیا ممکن است پس از پایان کلاس ریاضی امروز و شنیدن صدای زنگ تفریح، هنگامی که از جای خود بلند می‌شوید و بدون توقف به سمت در کلاس حرکت می‌کنید هیچ‌گاه به در خروجی نرسید؟

این مسئله‌ای است که فیلسوف یونانی، زنو^۲، بیش از دو هزار سال پیش مطرح کرد و به پارادکس زنو معروف است. او چنین استدلال کرد:

زمانی که از جای خود بلند می‌شوید تا به در خروجی برسید ابتدا نصف مسافت تا در خروجی را طی می‌کنید و سپس نصف مسیر باقی‌مانده را طی می‌کنید و به همین ترتیب، نصف مسیر باقی‌مانده و... و این روند همیشه ادامه خواهد داشت.



بنابراین، هیچ‌گاه به در خروجی نخواهید رسید؛ زیرا هر چند هر کدام از فاصله‌ها نصف فاصله پیشین است، هیچ‌کدام از این فاصله‌ها صفر نخواهند شد و همواره مسافتی وجود دارد که باید طی شود.

به بیان دیگر، اگر با سرعتی ثابت بخواهیم بدون توقف در کلاس به در خروجی برسیم و فرض کنیم برای طی مسافت a_1 زمان t لازم بوده است پس برای طی مسافت a_2 به زمان $\frac{t}{2}$ نیاز داریم. بنابراین:

$$T = t + \frac{t}{2} + \frac{t}{4} + \dots$$

و چون جملات دنباله $\dots$ و $\frac{t}{4}$ و $\frac{t}{2}$ هیچ‌گاه صفر نمی‌شوند، پس T از مجموع بی‌شمار جمله تشکیل شده است؛ از این رو مقدار T نیز بی‌نهایت خواهد بود!

بیش از دو هزار سال زمان نیاز بود تا به این تناقض پاسخ قطعی داده شود^۳. حل این مسئله در ریاضی به ایجاد شاخه‌ای به نام «سری‌های هندسی و محاسبه مجموع آنها» انجامید که در ادامه این درس برخی از مفاهیم آن را بیان خواهیم کرد. با بیان این مفاهیم، نگرانی شما نیز حل می‌شود و درمی‌یابید که چرا به در خروجی کلاستان خواهید رسید.

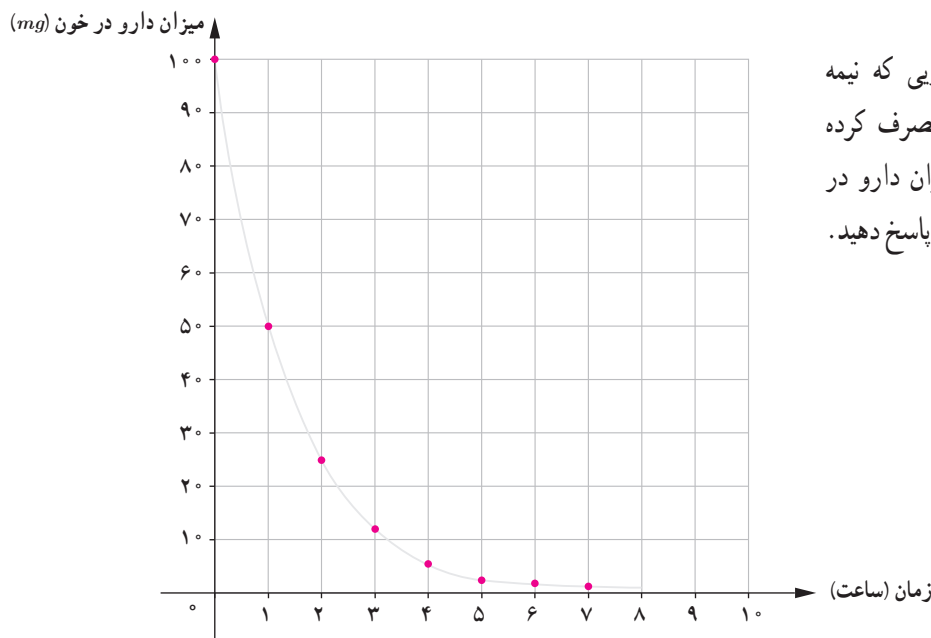
۱. Geometric Sequence

۲. Zeno's Paradox

۳. در سال ۱۸۱۲ گاوس و به دنبال او کوشی پس از تحقیقاتی که از سال‌ها پیش ریاضی‌دان‌هایی مانند مرکاتور، برونکور، نیوتن و اوایلر از اواخر قرن هفدهم شروع کرده بودند، نتایجی دقیق برای حل این مسائل یافتند.

میزان حذف دارو و ماده مؤثر آن در خون عموماً، مانند فعالیت صفحه ۶۸، با سرعت ثابت از جریان خون حذف نمی‌شود^۱ و در تعداد زیادی از داروها ماده مؤثر یک دارو با توجه به «نیمه عمر ماده مؤثر^۲» دارو در بدن کاهش می‌یابد. فعالیت زیر، تأثیر مفهوم نیمه عمر را در ضابطه تابعی دنباله مشخص می‌کند.

فعالیت



شخصی ۱۰۰ میلی گرم از دارویی که نیمه عمر آن یک ساعت است، مصرف کرده است. با توجه به نمودار «میزان دارو در خون - زمان» به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

الف) میزان دارو در بدن شخص پس از چند نیمه عمر، کمتر از ۲۰ میلی گرم خواهد بود؟ آیا می‌توانید مشخص کنید میزان دارو در بدن شخص در چه زمانی صفر خواهد شد؟ چرا؟

ب) اگر a_n میزان داروی موجود در بدن شخص پس از n امین نیمه عمر باشد، رابطه بازگشتی میزان دارو در بدن شخص چگونه است؟ با توجه به تعریف دنباله a_n و نیز تعریف نیمه عمر، هر جمله دنباله از حاصل ضرب عدد ثابت در جمله پیشین به دست می‌آید؛ یعنی:

$$a_1 = 50 \quad a_{n+1} = \dots \dots \dots a_n$$

ج) ضابطه تابعی (جمله عمومی) دنباله را مشخص کنید.

$$a_1 = 50 \quad a_2 = \frac{1}{2} \times 50 \quad a_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \times 50 \right) = \left(\frac{1}{2} \right)^2 \times 50 \quad a_4 = \dots \dots \dots$$

$$\Rightarrow a_n = \dots \dots \times 50$$

۱. اثر این دارو را First Order Kinetics می‌نامند.

۲. نیمه عمر یک دارو (Half - life medicine) مدت زمانی است که میزان دارو در خون به نصف میزان اولیه از زمان مصرف دارو کاهش می‌یابد. نیمه عمر یک دارو را با $t_{\frac{1}{2}}$ نشان می‌دهند.

خواندنی

دانستن نیمه عمر دارویی در پزشکی بسیار اهمیت دارد. برای مثال:

- در درمان بیماری های عفونی، آنتی بیوتیک مصرف شده باید در مدت زمانی مشخصی با میزان تقریباً ثابتی در جریان خون بیمار وجود داشته باشد.
- در درمان فشار خون یا مشکلات کلسترول خون، دارو باید در تمام شبانه روز به یک میزان در بدن وجود داشته باشد.
- کسانی که برای خواب بهتر در شب از قرص های آرام بخش استفاده می کنند باید در طول روز شاداب و سر حال باشند و دارو در خون آنها از میزان مشخصی کمتر باشد.

به دنباله هایی از اعداد که هر جمله شان به جز جمله اول از ضرب یک عدد ثابت مخالف صفر در جمله پیشین به دست می آید، دنباله هندسی گفته می شود. عدد ثابت را نسبت مشترک^۱ می نامند و عموماً با r نشان می دهند.

یک دنباله هندسی، دنباله ای به صورت

$$a, ar, ar^2, ar^3, \dots$$

است که در آن $a \neq 0$ جمله اول و $r \neq 0$ نسبت مشترک دنباله است. جمله n ام این دنباله هندسی از رابطه $a_n = a_1 r^{n-1}$ به دست می آید.

کار در کلاس

۱. جدول زیر را کامل کنید.

جمله عمومی دنباله	ضابطه بازگشتی	پنج جمله اول	نسبت مشترک	جمله اول
$a_n = (\frac{1}{3})^{n-1}$	$a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n$ $a_1 = 1$	$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}$	$r = \frac{1}{3}$	$a_1 = 1$
			$r = \frac{3}{2}$	$a_1 = \frac{1}{81}$
	$a_{n+1} = (-\frac{1}{2}) a_n$ $a_1 = 4$		$r = -\frac{1}{2}$	$a_1 = 4$
		$1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \frac{1}{625}$		
$a_n = 1 \circ \circ (\frac{1}{4})^{n-1}$				

۱. Common ratio

۲. با توجه به جدول صفحه قبل، در هر دنباله هندسی به صورت $a_n = a_1 r^{(n-1)}$ با فرض $a_1 > 0$:

الف) اگر $0 < r < 1$ ، دنباله a_n ،	☐ افزایشی	☐ کاهشی	☐ ثابت	است.
ب) اگر $r > 1$ ، دنباله a_n ،	☐ افزایشی	☐ کاهشی	☐ ثابت	است.
ج) اگر $r = 1$ ، دنباله a_n ،	☐ افزایشی	☐ کاهشی	☐ ثابت	است.

۳. ضابطه بازگشتی دنباله هندسی $a, ar, ar^2, ar^3, \dots$ را مشخص کنید.

۴. (هزینه استهلاک) — شخصی یک یخچال فریزر به قیمت $96/000/000$ تومان خریده است. هزینه استهلاک این یخچال هر سال معادل 1% ارزش سال پیش آن است. اگر v_n ارزش یخچال فریزر، n سال پس از خرید باشد:

الف) ضابطه تابعی دنباله v_n را به دست آورید.

با توجه به هزینه استهلاک 1% ، ارزش یخچال فریزر در هر سال 9% سال قبل خواهد بود؛ یعنی:

$$v_1 = 96/000/000 \times \frac{9}{10} \quad v_2 = 96/000/000 \times \left(\frac{9}{10}\right)^2 = \dots \quad v_3 = \dots \quad v_n = \dots$$

ب) بیشترین کاهش ارزش یخچال فریزر در چه سالی است؟ آیا می‌توانید کمترین کاهش ارزش آن را مشخص کنید؟ چرا؟
با توجه به اینکه ارزش یخچال در هر سال 1% کاهش می‌یابد، هر چه ارزش آن بیشتر باشد میزان 1% آن بیشتر خواهد بود.
بنابراین ...

ج) چرا ارزش یخچال فریزر پس از ده سال صفر نمی‌شود؟ با چه فرضی ارزش یخچال پس از 10 سال صفر می‌شود؟ ضابطه v_n را به گونه‌ای بنویسید که ارزش یخچال فریزر پس از ده سال صفر شود. دنباله v_n در این حالت حسابی است یا هندسی؟

۵. طبق آزمایش‌های انجام شده، نیمه عمر ماده کافئین برای یک شخص بالغ و سالم شش ساعت است. اگر یک لیوان بزرگ چای سیاه یا یک فنجان قهوه 80 میلی گرم کافئین داشته باشد، پس از چند نیمه عمر یا چند ساعت یک شخص می‌تواند چای یا قهوه مصرف کند؟ (با در نظر گرفتن اینکه اگر میزان کافئین در بدن کمتر از $5/0$ میلی گرم باشد، هیچ نوع وابستگی به این ماده در بدن ایجاد نمی‌شود.)

خواندنی

امروزه چای و قهوه از محبوب‌ترین نوشیدنی‌ها در میان مردم در تمام کشورها و فرهنگ‌ها هستند. هر دوی این نوشیدنی‌ها باعث تمرکز بیشتر، جلوگیری از خواب‌آلودگی و رفع خستگی می‌شوند. تمامی این تأثیرها به سبب وجود ماده کافئین در آنهاست. البته باید بدانیم که مصرف متعادل این نوشیدنی‌ها مفید است ولی وارد شدن بیش از اندازه کافئین به بدن منجر به اضطراب، تپش قلب، بی‌خوابی و... می‌گردد. مصرف بیش از اندازه آن به نوعی در افراد ایجاد وابستگی و عادت می‌کند؛ تا جایی که اگر این نوشیدنی‌ها را مصرف نکنند، دچار مشکلاتی چون سردرد می‌شوند. یکی از دلایل توصیه پزشکان به پرهیز از نوشیدن چای و قهوه، همین وابستگی و تأثیرات منفی نوشیدن بیش از اندازه آنهاست. توجه به نیمه عمر ماده کافئین می‌تواند راهنمای خوبی برای مصرف صحیح این نوشیدنی‌ها باشد.



فعالیت

برای درمان شخصی که مبتلا به نوعی گلودرد عفونی است، پزشک معالج قرص‌های آنتی‌بیوتیک حامل ۸° میلی گرم آنتی‌بیوتیک تجویز کرد. با توجه به اینکه نیمه عمر این آنتی‌بیوتیک هشت ساعت است، شخص بیمار باید در پایان هر هشت ساعت پس از خوردن قرص پیشین، این قرص‌ها را مصرف کند.

- الف) با کامل کردن جدول زیر، میزان آنتی‌بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار را پس از سه و شش بار مصرف قرص مشخص کنید.
 ب) با یک «رابطه بازگشتی» میزان آنتی‌بیوتیک در بدن شخص بیمار را پس از n بار مصرف قرص مشخص کنید.
 ج) آیا می‌توانید میان تعداد قرص مصرفی و میزان آنتی‌بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار رابطه‌ای مشخص کنید؟ (ضابطه تابعی دنباله)
 د) با جای گذاری مقادیر $n=1$ تا $n=6$ در رابطه به دست آمده در قسمت ج، صحت اعداد به دست آمده در جدول الف را بررسی کنید.

الف) اگر « S_n » میزان آنتی‌بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار پس از n بار مصرف قرص باشد، با توجه به فرض‌های مسئله :

n تعداد مصرف	تاریخ مصرف	زمان مصرف	S_n (میلی گرم)
۱	۱۵ بهمن	۰۰:۰۰ بامداد	$S_1 = 8^\circ mg$
۲	۱۵ بهمن	۰۸:۰۰ صبح	$S_2 = \frac{1}{4}S_1 + 8^\circ = 4^\circ + 8^\circ = 12^\circ$
۳	۱۵ بهمن	۰۴:۰۰ بعد از ظهر	$S_3 = \frac{1}{4}S_2 + 8^\circ = 6^\circ + 8^\circ =$
۴	۱۶ بهمن	۰۰:۰۰ بامداد	$S_4 = \dots\dots\dots + 8^\circ = \dots\dots\dots$
۵	۱۶ بهمن		$S_5 = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$
۶			$S_6 = \dots\dots\dots + \dots\dots\dots =$

- ب) با توجه به نحوه کامل کردن جدول بالا، رابطه بازگشتی میزان آنتی‌بیوتیک در بدن شخص پس از n بار مصرف دارو از رابطه زیر مشخص می‌شود :

$$S_{n+1} = \dots\dots\dots + \frac{1}{4}S_n, \quad S_1 = \dots\dots\dots$$

- ج) برای نوشتن ضابطه تابعی دنباله S_n بر حسب n ، اگر میزان آنتی‌بیوتیک هر قرص را A میلی گرم در نظر بگیریم (در این مسئله $A=8^\circ mg$ است)، با استفاده از رابطه بازگشتی به دست آمده در قسمت ب :

$$S_1 = A$$

$$S_2 = A + \frac{1}{4}S_1 = \dots$$

$$S_3 = \dots + \dots = A + \frac{1}{4}\left(A + \frac{1}{4}A\right) = A + \frac{1}{4}A + \left(\frac{1}{4}\right)^2 A$$

به همین صورت برای محاسبه S_6 :

$$S_6 = A + \frac{1}{4}A + \left(\frac{1}{4}\right)^2 A + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^5 A$$

پس برای محاسبه مجموع آنتی بیوتیک در بدن شخص پس از n بار مصرف:

$$S_n = A + \frac{1}{4}A + \left(\frac{1}{4}\right)^2 A + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} A \quad (1)$$

اگر طرفین رابطه (1) را در ضریب $\frac{1}{4}$ ضرب کنیم:

$$\frac{1}{4}S_n = \frac{1}{4}A + \dots + \dots + \dots \quad (2)$$

با تفاضل رابطه (1) از (2) رابطه زیر به دست می آید:

$$S_n - \frac{1}{4}S_n = A - \left(\frac{1}{4}\right)^n A \Rightarrow S_n \left(1 - \frac{1}{4}\right) = A \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

$$\Rightarrow S_n = A \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} \Rightarrow S_n = 4A \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

بنابراین، با فرض این مسئله $A = 80^{mg}$ ، مجموع میزان آنتی بیوتیک پس از n بار مصرف:

$$S_n = 160 \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

(د) با توجه به رابطه به دست آمده برای S_n :

$$S_1 = 160 \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^1\right) = 160 \times \frac{3}{4} = 120 \quad S_2 = \dots \quad S_6 = \dots$$

مطابق روشی که در این فعالیت برای محاسبه S_n انجام شد، مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی را می توانیم مشخص کنیم:

اگر جمله عمومی یک دنباله هندسی به صورت $a_n = ar^{n-1}$ باشد، حاصل مجموع:

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} \quad (r \neq 1)$$

از رابطه:

$$S_n = a \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

به دست می آید.

کار در کلاس

۱. در فعالیت صفحه پیش:

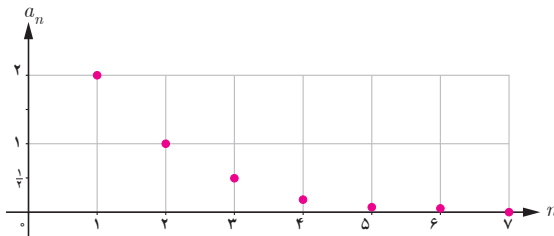
الف) مقادیر a و r را مشخص کنید.

ب) ضابطه های دنباله های a_n و S_n را بنویسید. با توجه به این ضابطه معنای a_3 و S_3 چیست؟

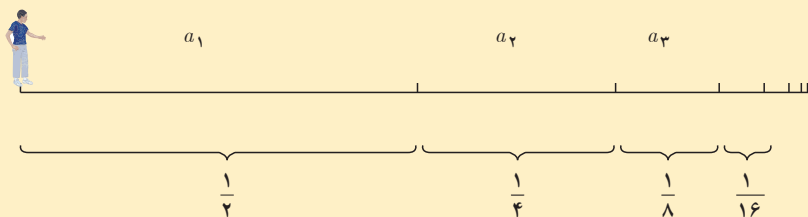
۲. جدول زیر را کامل کنید. (در صورت نیاز از ماشین حساب استفاده شود.)

جملات دنباله	a_1 (جمله اول)	r (نسبت مشترک)	S_n مجموع n جمله اول
$\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \frac{1}{54}, \dots$	$a_1 = \frac{1}{2}$	$r = \frac{1}{3}$	$S_5 = \frac{\frac{1}{2}(1-(\frac{1}{3})^5)}{1-\frac{1}{3}} = \frac{121}{162}$ $S_{\infty} =$
$\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \dots$	$a_1 = \dots\dots\dots$	$r = \dots\dots\dots$	$S_7 =$ $S_{\infty} =$
$\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \dots$	$a_1 = \dots\dots\dots$	$r = \dots\dots\dots$	$S_7 =$ $S_{\infty} =$
$\frac{2}{5}, 2, 10, \dots$	$a_1 = \dots\dots\dots$	$r = \dots\dots\dots$	$S_7 =$

۳. نمودار زیر یک دنباله هندسی را مشخص می کند. با نوشتن سه جمله اول آن و محاسبه نسبت مشترک دنباله هندسی :
 الف) جمله عمومی دنباله را مشخص کنید.
 ب) حاصل S_{∞} را به دست آورید.



جواب تناقض (پارادوکس) زنو



همان طور که خوانده شد، مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی از رابطه $S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$ به دست می آید. زمانی که نسبت مشترک عددی میان صفر و یک باشد، مقدار دنباله r^n بسیار بسیار کوچک می شود و می توانیم در حالتی که مجموع بی شمار جملات دنباله هندسی خواسته می شود، از مقدار آن صرف نظر کنیم. بنابراین:

$$S_n = a_1 \frac{1-r^n}{1-r} \xrightarrow{\text{در حالتی که } n \text{ عدد خیلی بزرگ باشد}} S_n = a_1 \frac{1-\cancel{r^n}}{1-r} = \frac{a_1}{1-r}$$

اکنون یک بار دیگر به قسمت پایانی استدلال زنو توجه کنید. اگر مطابق گفته او زمان رسیدن به در خروجی کلاس از

رابطه $T = t + \frac{t}{2} + \frac{t}{4} + \dots$ به دست آید که یک دنباله هندسی با نسبت مشترک $\frac{1}{2}$ است:

$$\text{زمان رسیدن به در خروجی کلاس} = t + \frac{t}{2} + \frac{t}{4} + \dots$$

$$= \frac{t(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}}$$

چون n تا بی نهایت ادامه دارد و مقدار عدد $(\frac{1}{2})^n$ در بی نهایت بسیار بسیار ناچیز است، از مقدار $(\frac{1}{2})^n$ می توان صرف نظر کرد:

$$\frac{t(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{t(1-\cancel{(\frac{1}{2})^n})}{1-\frac{1}{2}} = \frac{t}{\frac{1}{2}} = 2t$$

یعنی اگر برای نصف مسافت طی شده t ثانیه زمان مصرف کرده اید، با فرض ثابت بودن سرعت شما، بقیه مسافت را نیز در t ثانیه و کل مسافت را در $2t$ ثانیه طی می کنید.

در واقع، اشتباه زنو این بود که می پنداشت اگر بی شمار جمله با هم جمع شوند، حاصل این بی شمار جمله باید بی نهایت شود!

۱. با نوشتن جملات رابطه‌های بازگشتی مشخص کنید کدام یک از آنها یک دنباله هندسی را تشکیل می‌دهد.

$$\begin{array}{lll} ۱) a_{n+1} = (a_n)^2 & a_1 = \frac{1}{2} & ۲) a_{n+1} = \frac{2}{3} a_n \quad a_1 = \frac{1}{2} \\ ۳) a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n} & a_1 = 1 & ۴) a_{n+1} = 2a_n \quad a_1 = 1 \end{array}$$

۲. با توجه به مفهوم دنباله هندسی و نسبت مشترک جملات دنباله هندسی ثابت کنید هرگاه a و b سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، آن‌گاه $a \times c = b^2$. (b را واسطه هندسی میان a و c می‌نامند.)

۳. اگر $x+3$ و $x+2$ و x سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، مقدار x را به دست آورید.

۴. سرطان از تکثیر بیش از حد سلول‌ها در بدن ایجاد می‌شود. در فردی که به سرطان سینه^۱ مبتلاست، از روش‌های مختلفی از جمله شیمی درمانی برای از بین بردن سلول‌های سرطانی استفاده می‌شود. در این روش معمولاً دارو چندین دفعه به بیمار تجویز می‌شود و هر بار درصدی از سلول‌های سرطانی از بین می‌رود.

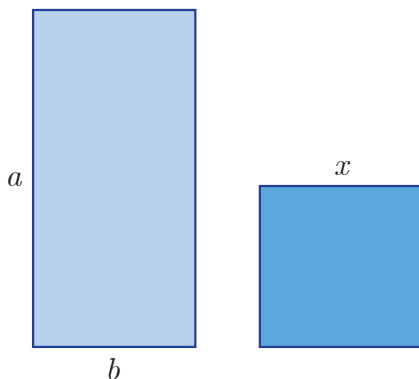
الف) اگر داروی شیمی درمانی هر بار 6% سلول‌های سرطانی فردی را از بین ببرد و اگر توده سرطانی او در ابتدا 10^{12} سلول داشته باشد، پس از ۳ بار شیمی درمانی چه تعداد سلول سرطانی در بدن این فرد باقی می‌ماند؟

ب) فرض کنید پس از اولین شیمی درمانی، رشد توده سرطانی متوقف شده است. برای اینکه این شخص به طور کامل درمان شود، ابتدا باید تعداد سلول‌های سرطانی‌اش به کمک شیمی درمانی کمتر از $10^6 \times 7$ سلول شود و سپس با کوچک شدن توده سرطانی به کمک جراحی، باقی‌مانده سلول‌های سرطانی او برداشته شود. برای این منظور، مطابق اطلاعات مسئله این شخص چند مرتبه باید شیمی درمانی شود؟

۵. میان دو عدد a و b ، n عدد را طوری قرار می‌دهیم که جملات دنباله شروع از a و ختم به b یک دنباله هندسی تشکیل دهند. ثابت کنید نسبت مشترک دنباله‌های هندسی از رابطه $r^{n+1} = \frac{b}{a}$ به دست می‌آید. (راهنمایی: تعداد کل جملات $(n+2)$ جمله است.)

۶. جمله سوم یک دنباله هندسی ۲۷ و جمله پنجم همین دنباله ۲۴۳ است. جمله هفتم این دنباله هندسی را به دست آورید.

۱. مطابق آمار، سالیانه ده هزار نفر در ایران به سرطان سینه مبتلا می‌شوند (مرکز تحقیقات سرطان دانشگاه علوم پزشکی شهید بهشتی). در حال حاضر، حدود 25% مبتلایان به علت تشخیص دیررس و تأخیر در شروع درمان جانیشان را از دست می‌دهند. تشخیص زودرس در سرطان سینه امکان‌پذیر است و با گنجاندن غربالگری سرطان سینه در نظام بهداشتی کشور و افزایش آگاهی بانوان درباره علائم بیماری می‌توان میزان مرگ و میر ناشی از این بیماری را به طور قابل توجهی کاهش داد.



۷. مستطیلی با اضلاع a و b مطابق شکل مقابل مفروض است.

اگر مربعی به ضلع x هم مساحت با آن باشد، کدام یک از دنباله‌های

زیر تشکیل یک دنباله هندسی می‌دهند؟

الف) x و b و a

ب) b و x و a

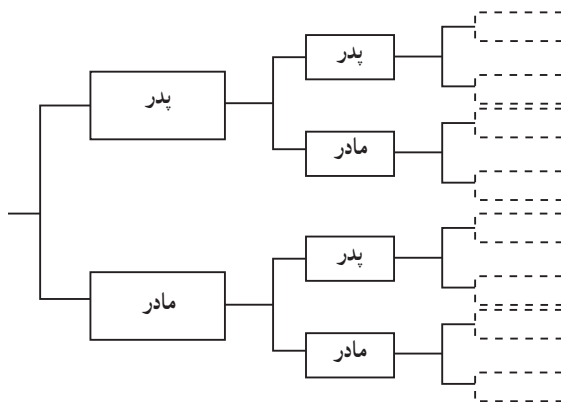
پ) x و a و b

۸. یک شهاب سنگ ۱۵ هزار کیلوگرم وزن دارد. پس از ورود آن به جو زمین، در هر دقیقه ۱۵٪ از وزنش به سبب تماس با جو از بین می‌رود. پس از گذشت پنج دقیقه از ورود این شهاب سنگ به جو زمین، چقدر از وزن آن باقی می‌ماند؟

۹. شخصی پدر و مادر، دو پدر بزرگ و دو مادر بزرگ، چهار پدر پدر بزرگ و چهار مادر مادر بزرگ و ... دارد.

الف) نیاکان این شخص در ده نسل قبلی چند نفر بوده‌اند؟ (نخستین نسل را پدر و مادر شخص در نظر بگیرید.)

ب) مجموع نیاکان این شخص از ده نسل قبل تا یک نسل قبل (یعنی پدر و مادر شخص) چند نفرند؟



۱۰. مجموع‌های زیر را به دست آورید.

الف) $۱ + ۴ + ۱۶ + \dots + ۴۰۹۶$

ب) $\frac{1}{۵} + \frac{1}{۱۰} + \frac{1}{۲۰} + \dots + \frac{1}{۶۴۰}$

۱۱. نخستین جمله یک دنباله هندسی ۱۵۳۶ و نسبت مشترک این دنباله هندسی $\frac{1}{۳}$ است. کدام جمله دنباله برابر ۶ است؟ مجموع

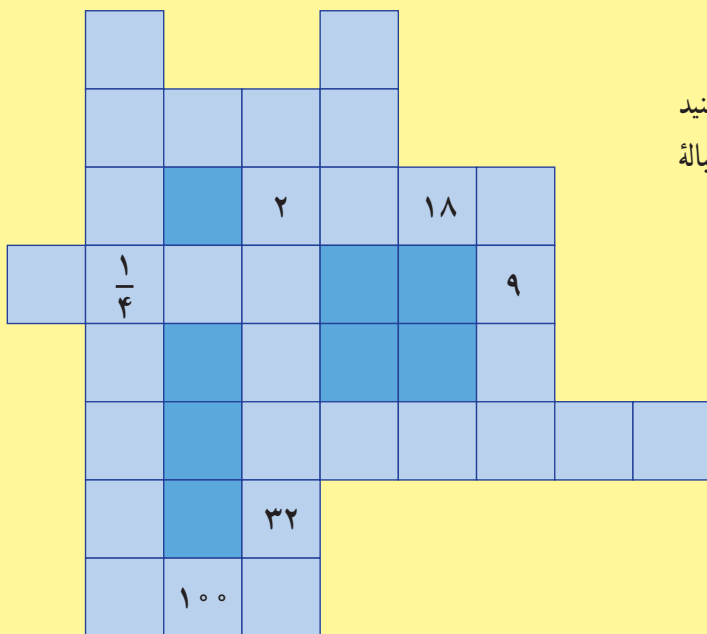
جملات این دنباله از ۱۵۳۶ تا عدد ۶ را به دست آورید.

Figure 1 shows a unit square divided into four quadrants. The bottom-left quadrant is shaded purple and labeled $\frac{1}{4}$. The top-right quadrant is divided into four smaller squares, with the bottom-left one shaded purple and labeled $\frac{1}{16}$. The top-left and bottom-right quadrants are white and labeled $\frac{1}{4}$ each.

(ب) اگر روند رنگ آمیزی گفته شده را n مرحله انجام دهیم، مجموع مساحت های مربع های رنگی از چه رابطه ای به دست می آید؟

(پ) پس از شش مرحله رنگ آمیزی مربع به روش بالا، چه مساحتی از مربع رنگ می شود؟

مربع های زیر را با اعداد مثبت به گونه ای پر کنید
که هر سطر و هر ستون جدول روبه رو یک دنباله
هندسی تشکیل بدهد.



درس ۲

«ریشه nام و توان گویا»

تاکنون با مفهوم توان‌های صحیح اعداد و نحوه ریشه‌گیری دوم و سوم آنها آشنا شده‌اید. فعالیت زیر به شما کمک می‌کند تا ضمن مرور آنچه تاکنون درباره اعداد توان‌دار و ریشه‌های دوم و سوم اعداد یاد گرفته‌اید، با مفهوم ریشه‌های چهارم، پنجم و ... اعداد حقیقی و نحوه محاسبه آنها آشنا شوید.

فعالیت

۱. حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\begin{array}{cccc} 4^2 = & (2)^{-7} = & \left(\frac{2}{5}\right)^4 = & 73^1 = \\ (-3)^6 = & -3^6 = & (0/0)^5 = & \left(1\frac{1}{2}\right)^0 = \end{array}$$

۲. الف) مانند نمونه، حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به صورت عدد توان‌دار بنویسید و در جدول در جای مناسب قرار دهید. (m و n اعداد صحیح و a و b اعداد حقیقی مخالف صفرند)

$$\begin{array}{ccc} (-36)^7 \div 9^7 = & (2/1)^6 \times \left(\frac{2}{1}\right)^4 \times \left(2\frac{1}{0}\right)^4 = (2/1)^{11} & \\ (-4)^3 \times (-5)^3 = & \left(\frac{4}{7}\right)^5 \div \left(\frac{4}{7}\right)^8 = & (1/0)^8 = \end{array}$$

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$(2/1)^6 \times (\frac{2}{1})^4 = (2/1)^{10}$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	
$a^m \cdot b^m = (ab)^m$	
$\frac{a^m}{b^m} = (\frac{a}{b})^m$	$(-36)^9 \div 9^9 =$
$(a^m)^n = a^{mn}$	

ب) مانند نمونه، برای هر یک از رابطه‌ها یا مثال‌های زیر، رابطه یا مثال متناظر بنویسید.

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$5^7 \times 5^8 = 5^{7+8} = 5^{15}$
	$9^{10} \div 9^6 = 9^{10-6} = 9^4$
$a^m \cdot b^m = (ab)^m$	
$\frac{a^m}{b^m} = (\frac{a}{b})^m$	
	$(2^3)^4 = 2^{3 \times 4} = 2^{12}$

۳. همان‌طور که می‌دانید، اگر a یک عدد حقیقی مثبت باشد، $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$ ریشه‌های دوم عدد a هستند. به عبارت دیگر، ریشه‌های دوم عدد a همان ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 = a$ هستند. برای مثال، ریشه‌های دوم عدد ۱۶ ریشه‌های معادله $x^2 = 16$ می‌باشند و چون $4^2 = 16$ و $(-4)^2 = 16$ ، پس ۴ و -۴ یا $\sqrt{16}$ و $-\sqrt{16}$ ریشه‌های دوم عدد ۱۶ هستند. همچنین، ریشه سوم عدد حقیقی مانند a ، ریشه معادله $x^3 = a$ است. برای مثال، ریشه سوم عدد ۲۷، ریشه معادله $x^3 = 27$ است که برابر ۳ می‌باشد. با همین استدلال، ریشه پنجم عدد -۳۲، پاسخ معادله $x^5 = -32$ است که برابر ——— و ریشه‌های ششم عدد ۶۴، ریشه‌های معادله $x^6 =$ ——— هستند که برابر ۲ و -۲ می‌باشند. جدول صفحه بعد را مانند نمونه کامل کنید.

عدد (a)	۶۴	-۶۴
ریشه های چهارم	$\sqrt[4]{64}, -\sqrt[4]{64}$	وجود ندارد
$\sqrt[4]{a}$	$\sqrt[4]{64}$	وجود ندارد
ریشه پنجم	$\sqrt[5]{64}$	$\sqrt[5]{-64}$
$\sqrt[5]{a}$		
ریشه های ششم		
$\sqrt[6]{a}$		
.....		
.....		

اگر $n \geq 2$ یک عدد طبیعی باشد، b را یک ریشه n ام عدد a می نامیم، هرگاه: $b^n = a$.
همچنین $\sqrt[n]{a}$ ، وقتی n زوج است، ریشه n ام مثبت عدد a است.

در حالت کلی تر، درباره ریشه های n ام ($n \in \mathbb{N}$) عددی مانند a می توان گفت:

$a \geq 0$	n زوج باشد	ریشه n ام a $= \sqrt[n]{a}, -\sqrt[n]{a}$
	n فرد باشد	ریشه n ام a $= \sqrt[n]{a}$
$a < 0$	n زوج باشد	ریشه ندارد
	n فرد باشد	ریشه n ام a $= \sqrt[n]{a}$

کار در کلاس

۱- با توجه به جدول بالا، مانند نمونه برای هر یک از موارد خواسته شده مثالی بیاورید و آن را حل کنید. مقدار تقریبی هر یک از مثال ها را می توانید به کمک ماشین حساب به دست آورید.

ریشه‌های ۸^{ام} عدد ۲۵ $\Rightarrow a=25, n=8$ زوج است و $a \geq 0$

$\Rightarrow n=$, $a=$ فرد است و $a \geq 0$

$\Rightarrow n=$, $a=$ زوج است و $a < 0$

$\Rightarrow n=$, $a=$ فرد است و $a < 0$

۲. با توجه به اینکه $\sqrt[n]{a^n} = a$ و $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ این رابطه در حالت کلی نیز برای هر $n \geq 2$ برقرار است؛ یعنی:

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a| & \text{زوج است } n \\ a & \text{فرد است } n \end{cases}$$

برای مثال، $\sqrt[5]{(-\frac{8}{3})^5} = -\frac{8}{3}$ و $\sqrt[4]{(-3)^4} = 3$ همچنین $\sqrt[3]{(-15)^3} = -15$ و $\sqrt[2]{(-15)^2} = 15$

توان‌های گویا

سهام‌داران یک شرکت تولیدکننده محصولات فرهنگی از مدیر عامل این شرکت خواستند که جهت برنامه‌ریزی برای توسعه شرکت گزارش عملکرد شرکت طی سال‌های قبل را ارائه کند. مدیرعامل در جلسه ارائه گزارش اعلام کرد که طی سال‌های قبل، سود سالانه شرکت ۲۰ درصد بوده است و پیش‌بینی کرد که این سود در سال‌های آینده نیز محقق شود.

اگر سرمایه شرکت را ۱۰۰ میلیون تومان، سود سالانه آن را ۲۰٪ و میزان درآمد را در تمام مدت یک سال، یکسان در نظر بگیریم، سهام‌داران شرکت می‌توانند با استفاده از فرمول زیر، سرمایه شرکت را طی سال‌های آینده برآورد کنند:

$$\text{زمان (بر حسب سال)} \rightarrow 100 \times (1/2)^t = \text{سرمایه شرکت (بر حسب میلیون تومان)}$$



برای مثال، پس از گذشت یک سال و دو سال به ترتیب می‌توان سرمایه شرکت را به صورت زیر حساب کرد:

$$100 \times (1/2)^1 = 120 = \text{سرمایه شرکت (بر حسب میلیون تومان): پس از گذشت یک سال}$$

$$100 \times (1/2)^2 = 144 = \text{سرمایه شرکت (بر حسب میلیون تومان): پس از گذشت ۲ سال}$$

حال اگر سهام‌داران این شرکت می‌خواستند سرمایه‌ی شرکت را در مدتی کمتر از یک سال، برای مثال ۶ ماه بعد (نیم سال) یا ۲۰۰ روز بعد، محاسبه کنند چگونه می‌توانستند این کار را انجام دهند؟

تا اینجا شما با توان‌های صحیح و نحوه‌ی کاربرد آنها در محاسبات آشنا شدید اما در حل و مدل‌سازی بسیاری از مسائل واقعی نیاز به استفاده از توان‌های غیر صحیح همانند توان‌های گویاست. در ادامه، با مفهوم توان‌های گویا و نحوه‌ی استفاده از آنها در محاسبات آشنا می‌شوید.

فعالیت



۱. پدر محمد زیست‌شناس است و در آزمایشگاه روی باکتری‌ها کار می‌کند. روزی او محمد را با خود به محل کارش برد و نوعی باکتری را در زیر میکروسکوپ، نشان داد که در شرایط آزمایشگاهی در هر ساعت جرم آن ۲ برابر می‌شود. سپس، از محمد خواست که جرم اولیه‌ی باکتری را یک گرم در نظر بگیرد و جدول زیر را کامل کند. شما نیز به او در کامل کردن جدول کمک کنید.

زمان (ساعت)	۱	۲	۳		۵		۷	_____	t
جرم (گرم)				$۲^۴=۱۶$		$۲^۶=۶۴$		_____	۲^t

محمد پس از کامل کردن جدول، از پدرش پرسید: آیا حتماً باید تا پایان ساعت منتظر شویم و نمی‌توانیم جرم باکتری را در کمتر از یک ساعت به‌دست آوریم؟ برای مثال، جرم باکتری‌ها پس از نیم ساعت چقدر می‌شود؟

پدر محمد: نظر خودت درباره‌ی جرم باکتری‌ها پس از نیم ساعت چیست؟

محمد: مطمئن نیستم ولی حدس می‌زنم که $۲^{\frac{۱}{۲}}$ گرم شود، اما مقدار $۲^{\frac{۱}{۲}}$ را نمی‌دانم چقدر می‌شود؛ چون تمام توان‌هایی که ما تاکنون یاد گرفته‌ایم، توان‌های صحیح بوده‌اند.

پدر محمد به صورت زیر به او نشان داد که جرم باکتری‌ها پس از نیم ساعت چقدر می‌شود و او را با توان‌های گویا آشنا کرد:

اگر فرض کنیم جرم باکتری‌ها در هر نیم ساعت a برابر شود، بعد از یک ساعت برابر $a^2 = a \times a$ می‌شود. با توجه به جدولی که کامل کردی، داریم: $a^2 = ۲$ یعنی $a = \sqrt{۲}$. (زیرا a مثبت است). بنابراین، پس از نیم ساعت جرم باکتری‌ها $\sqrt{۲}$ گرم خواهد شد.

حالا می‌خواهیم بدانیم آیا می‌توانیم $\sqrt{۲}$ را به صورت توانی از ۲ بنویسیم.

معادله $\sqrt{۲} = ۲^b$ را در نظر می‌گیریم و سعی می‌کنیم مقدار b را به‌دست آوریم.

$$\sqrt{2} = 2^b \xrightarrow{\text{طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم}} (\sqrt{2})^2 = (2^b)^2 \Rightarrow 2 = 2^{2b} \Rightarrow 2^1 = 2^{2b} \Rightarrow 2b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

بنابراین، داریم: $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$

پس، جرم باکتری‌ها بعد از نیم ساعت ($\frac{1}{2}$ ساعت)، $2^{\frac{1}{2}}$ گرم خواهد بود و حدس شما درست است. حالا بعد از پانزده دقیقه، جرم

باکتری‌ها چند گرم خواهد شد؟

محمد: چون پانزده دقیقه، $\frac{1}{4}$ ساعت است، پس $2^{\frac{1}{4}}$ گرم یا $\sqrt[4]{2}$ گرم خواهد بود.

حالا شما مانند محمد جرم باکتری‌ها را در زمان‌های داده شده به دست آورید.

$$= \text{پس از } 2^\circ \text{ دقیقه (— ساعت)} = \sqrt[4]{2} = \text{پس از } 1^\circ \text{ دقیقه } (\frac{1}{6} \text{ ساعت})$$

برای هر عدد طبیعی $n \geq 2$ ، توان $\frac{1}{n}$ عدد حقیقی مثبت a را چنین تعریف می‌کنیم:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

در این کتاب اگر $a < 0$ ، $a^{\frac{1}{n}}$ را تعریف نمی‌کنیم. برای مثال، عبارت‌هایی مانند $(-2)^{\frac{1}{2}}$ و $(-1)^{\frac{1}{3}}$ را تعریف نمی‌کنیم. همچنین،

هرجا عبارت‌های $a^{\frac{1}{n}}$ بیان می‌شود، a را عددی مثبت در نظر می‌گیریم.

$$2^6 = 2^{2 \times 3} = (2^2)^3$$

۲. در خصوص توان‌های صحیح اعداد دیدید که:

درباره توان‌های گویای اعداد نیز می‌توانیم به طریقی مشابه عمل کنیم:

$$3^{\frac{2}{3}} = 3^{2 \times \frac{1}{3}} = (3^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3^2}$$

$$7^{\frac{5}{4}} = 7^{5 \times \frac{1}{4}} = (7^5)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{7^5}$$

و به طور کلی، داریم:

هرگاه $a > 0$ ، برای دو عدد طبیعی m و n ، $a^{\frac{m}{n}}$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

بنابراین، $a^{\frac{m}{n}}$ نیز به این صورت تعریف می‌شود:

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$$

اعداد توان دار زیر را به شکل رادیکالی بنویسید.

$$5^{\frac{3}{4}} =$$

$$6^{\frac{7}{9}} =$$

$$12^{-\frac{2}{11}} =$$

$$(2\frac{1}{3})^{-\frac{8}{3}} =$$

$$(\circ/\circ\circ 1)^{\frac{14}{4}} =$$

روابطی که در ابتدای درس دربارهٔ توان های صحیح اعداد یادآوری شد، درخصوص توان های گویا و حقیقی^۱ اعداد حقیقی مثبت نیز برقرار است.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (m \text{ و } n \text{ اعداد حقیقی و } a \text{ و } b \text{ اعداد حقیقی مخالف صفر هستند.})$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$a^m \cdot b^m = (ab)^m$$

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

کار در کلاس

۱. هریک از عبارت های توانی زیر را به صورت رادیکالی و عبارت های رادیکالی را به صورت توان دار بنویسید.

$$3^{\frac{1}{4}} =$$

$$\sqrt[4]{8} =$$

$$\sqrt[3]{25} =$$

$$\sqrt[4]{2/7} =$$

$$(\circ/31)^{\frac{1}{2}} =$$

$$\sqrt[4]{6} =$$

۲. با توجه به مسئله بیان شده در ابتدای معرفی توان های گویا، سرمایه شرکت مذکور را مانند نمونه در هریک از زمان های خواسته شده به دست آورید.

$$100 \times (1/2)^{\frac{1}{2}} = 100 \times \sqrt{1/2} \quad \text{۶ ماه } (1/2 \text{ سال}) \text{ بعد}$$

۳ سال و ۶ ماه بعد

۲۰۰ روز بعد

۱ سال و ۲ ماه بعد

۱- در این کتاب، تمامی توان های اعداد، گویا هستند.

۳. مانند نمونه، هر یک از اعداد توان دار زیر را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید.

$$4^{\frac{1}{2}} = (2^2)^{\frac{1}{2}} = 2^{2 \times \frac{1}{2}} = 2$$

$$125^{-\frac{1}{3}} =$$

$$100^{\frac{1}{2}} =$$

$$32^{\frac{1}{5}} =$$

۴. هر یک از عبارت های زیر را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید.

$$(2 \times 8)^{\frac{1}{4}} =$$

$$-4(1000)^{\frac{1}{3}} =$$

$$3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} =$$

$$7^{\frac{3}{4}} \times 7^{\frac{5}{4}} =$$

$$125^{\frac{2}{3}} \div 125^{\frac{1}{4}} =$$

$$8^{\frac{2}{7}} \times (1/5)^{\frac{2}{7}} =$$

۵. دانش آموزی $\sqrt[3]{-8}$ را به صورت $(-8)^{\frac{1}{3}}$ نوشت. توضیح دهید که چرا نمایش $\sqrt[3]{-8}$ به صورت $(-8)^{\frac{1}{3}}$ نادرست است.

تمرین

۱. با استفاده از تعریف توان های گویا نشان دهید که $\sqrt{5}$ ، $\sqrt[4]{5^2}$ ، $\sqrt[6]{5^3}$ با هم برابرند.

۲. حاصل هر یک از عبارت های زیر را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید. (a ، m و n اعداد حقیقی مثبت اند).

$$3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{4}} =$$

$$5^{\frac{1}{4}} \times 5^{(-\frac{1}{4})} =$$

$$8^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} =$$

$$(2^6)^{\frac{1}{3}} =$$

$$\left(\frac{3^4}{2^6}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$\left(\frac{a^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{4}}}\right)^{-4} =$$

$$3^{2/26} \times 3^{2/14} =$$

$$(m^{\frac{3}{4}} \cdot n^{\frac{1}{2}})^2 (m^2 n^3)^{\frac{1}{2}} =$$

۳. در هر یک از تساوی‌های زیر، مقدار x را مشخص کنید.

$$8^x \times 9^5 = 72^5$$

$$(\circ/36)^4 \times (\circ/36)^x \times (\circ/36)^{-6} = (\circ/36)^7$$

$$(3^x)^6 = \frac{1}{3^2}$$

$$\frac{x^5 \times 15^3}{3^2 \times 3^5 \times 3} = 5^8$$

۴. همان‌طور که می‌دانید، حجم کره‌ای به شعاع r با استفاده از فرمول $v = \frac{4}{3}\pi r^3$ (حجم کره) به دست می‌آید.

الف) توضیح دهید که چگونه می‌توان با استفاده از مفهوم ریشه‌گیری و توان‌های گویا، شعاع کره‌ای به حجم v را از فرمول زیر به دست آورد.

$$r = \left(\frac{3v}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$

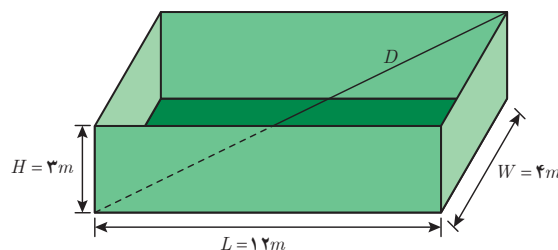
ب) شعاع این تانکر کره‌ای شکل را که حجم آن $\frac{32\pi}{3}$ است، به دست آورید.



۵. اگر D قطر جعبه‌ی زیر باشد، اندازه آن از طریق تابع $D = (L^2 + W^2 + H^2)^{\frac{1}{2}}$ (طول، L ، عرض W و ارتفاع جعبه) به دست می‌آید.

الف) با توجه به شکل، اندازه D را به دست آورید.

ب) اگر اندازه $L=W=H=1\text{ m}$ باشد، اندازه D را به دست آورید.



فعالیت

«بنیاد ملی بازی‌های رایانه‌ای» با هدف تبیین، تقویت و ترویج مبانی فرهنگ و هویت ایرانی – اسلامی و حمایت کامل از ظرفیت‌های موجود صنعت بازی‌های رایانه‌ای، از سال ۱۳۸۵ شروع به کار کرده و تاکنون تولیدات خوبی داشته است. یکی از تولیدات این بنیاد، «مجموعه بازی‌های سبز» است که قرار است دانش‌آموز را در قالب بازی، به آموزش و نگهداری از منابع و ترویج فرهنگ درخت‌کاری هدایت کند. بازی به این صورت است که در شروع بازی یک امتیاز به بازیکن داده می‌شود. اگر بازیکن بتواند در طول بازی در مرحله اول، یکی از عوامل آلوده‌کننده محیط زیست را شناسایی و نابود کند، ۳ امتیاز می‌گیرد. در مرحله دوم، اگر بازیکن بتواند عامل دیگری را که باعث تخریب محیط زیست می‌شود شناسایی و نابود کند، ۹ امتیاز می‌گیرد و به همین ترتیب در مرحله بعد، ۲۷ امتیاز، در مرحله بعد از آن ۸۱ امتیاز و ... خواهد گرفت. بازی زمانی تمام می‌شود که بازیکن به امتیاز ۴۳۰۴۶۷۲۱ برسد. اکنون به سؤالات زیر پاسخ دهید.

۱. فکر می‌کنید در مرحله ششم، بازیکن چند امتیاز خواهد گرفت؟

برای یافتن پاسخ، جدول زیر را کامل کنید.

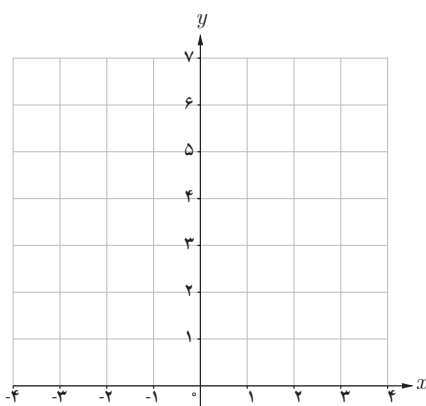
جدول ۱

تعداد مراحل بازی	میزان امتیازهای کسب شده
۰	$3^0 = 1$
۱	$3^1 = 3$
۲	$3^2 = 9$
۳	$3^3 = 27$
۴	?
?	۲۴۳
۶	?
۷	?
۸	?
۹	?
۱۰	?

۲. در کدام مرحله، میزان امتیازات کسب شده ۶۵۶۱ خواهد شد؟
۳. آیا اعداد این جدول، الگویی را مشخص می‌کند؟ بین تعداد مراحل بازی و میزان امتیازات کسب شده، رابطه‌ای به دست آورید.
۴. با توجه به رابطه به دست آمده در قسمت قبل، آیا می‌توانید امتیازات کسب شده در مراحل دهم، بیستم و یا مرحله n ام را به دست آورید؟

فعالیت

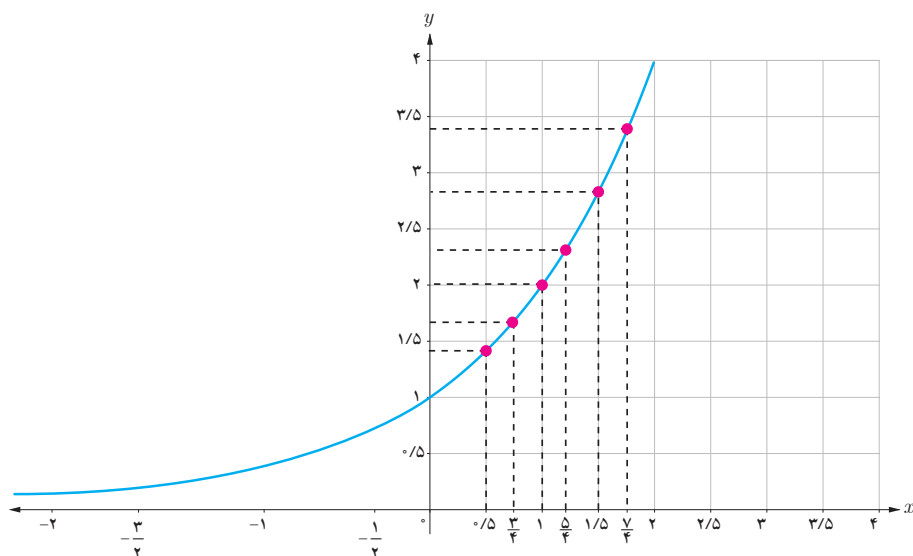
- در بخش دنباله‌ها، با توجه به مثلث خیام و اعداد واقع در این مثلث، الگویی را به دست آوردیم که به عنوان تابع از ضابطه $f(n) = 2^n$ پیروی می‌کرد. دوباره به این فعالیت برمی‌گردیم؛
۱. مقادیر به دست آمده در آن فعالیت را در جدولی تنظیم کنید و نقاط به دست آمده را روی دستگاه مختصات زیر نمایش دهید.



۲. جدول زیر را با ماشین حساب کامل کرده‌ایم. این نقاط را نیز در دستگاه مختصات بالا نشان دهید.

x	2^x
۰	۱
$-\frac{1}{2}$	۰/۷۰۷
-۱	۰/۵۰۰
$-\frac{۳}{۲}$	۰/۳۵۳
-۲	۰/۲۵۰

۳. اگر مقادیر تابع $f(x) = 2^x$ را برای x های دیگر نیز به دست آوریم، نمودار تابع $f(x) = 2^x$ به صورت زیر خواهد بود :



هر تابع به صورت $y = a^x$ ، که a یک عدد حقیقی مثبت و مخالف یک است، یک تابع نمایی^۱ نامیده می شود.

تذکر: حرف a معرف پایه و حرف x معرف نما یا توان است. با نمادهای تعریف شده در سال دهم برای یک تابع، می توان تابع نمایی f را به صورت زیر تعریف کرد :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$f(x) = a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$$

منظور از $\mathbb{R}^+$ ، مجموعه $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x > 0\}$ است.

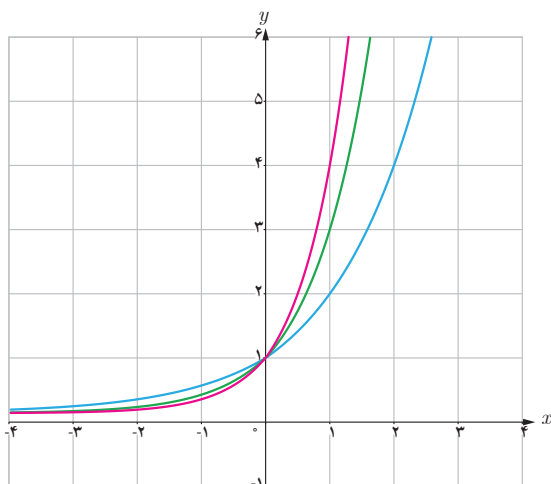
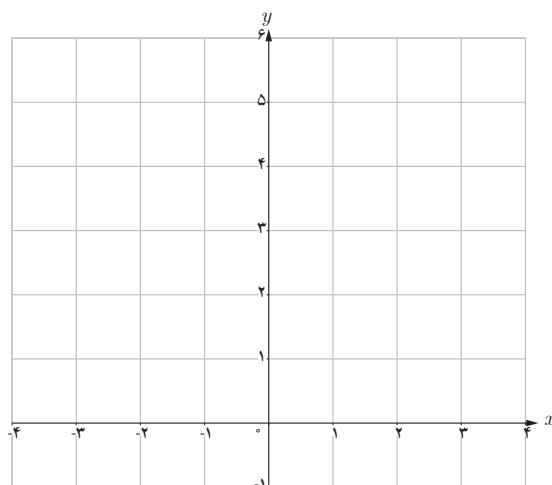
فعالیت

الف) در فعالیت ابتدای این درس با تابع نمایی $y = 3^x$ آشنا شدید. نقاط y حاصل شده در جدول صفحه بعد را روی محورهای مختصات به دست آورید. سپس آنها را به هم وصل کنید.

۱- این تابع به این علت نمایی نامیده می شود که متغیر x در نما یا توان قرار دارد.

جدول ۲

x	3^x	y	محاسبه y با استفاده از ماشین حساب تا سه رقم اعشار
-۲	3^{-2}	$\frac{1}{9}$	۰/۱۱۱
$-\frac{3}{2}$	$3^{-\frac{3}{2}}$	$\frac{1}{3\sqrt{3}}$	۰/۱۹۲
-۱	3^{-1}	$\frac{1}{3}$	۰/۳۳۳
$-\frac{1}{2}$	$3^{-\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	۰/۵۷۷
۰	3^0	۱	۱
$\frac{1}{2}$	$3^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{3}$	۱/۷۳۲
۱	3^1	۳	۳
$\frac{3}{2}$	$3^{\frac{3}{2}}$	$3\sqrt{3}$	۵/۱۹۶
۲	3^2	۹	۹



همان گونه که دیده می شود، نمودار تابع $y = 3^x$ در نقطه یک محور y ها را قطع می کند.

ب) با استفاده از نمودار تابع $y = 3^x$ ، مقدار تقریبی عدد $3^{\frac{5}{2}}$ را به دست آورید.

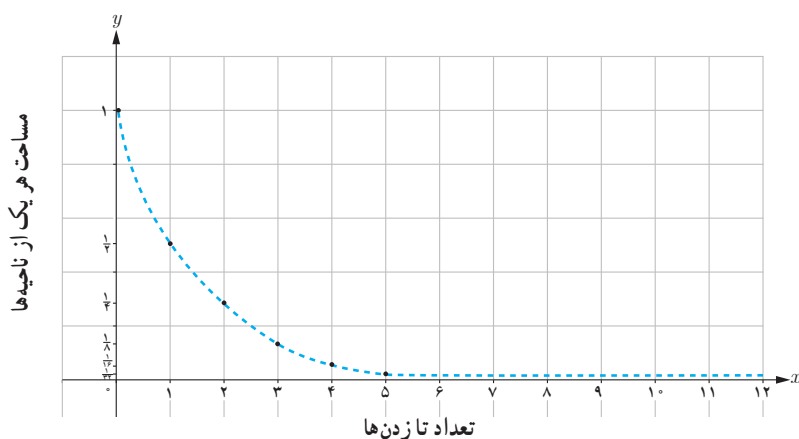
پ) نمودار توابع $y = 2^x$ ، $y = 3^x$ و $y = 4^x$ را در یک دستگاه رسم کرده ایم. ابتدا مشخص کنید کدام نمودار بیانگر هر یک از توابع فوق است. سپس، تفاوت ها و شباهت های بین این سه تابع را بیان کنید.

یک صفحه کاغذ سفید را انتخاب کنید و آن را به دو قسمت مساوی تا بزنید. بعد از تا زدن، دو ناحیه به وجود می‌آید که مساحت هر یک، نصف مساحت اولیه است. اکنون کاغذ تا شده را یک بار دیگر تا بزنید. در دومین تا زدن، چهار ناحیه ایجاد می‌شود که مساحت هر کدام از آنها، نصف مساحت قبلی، یعنی $\frac{1}{4}$ مساحت اولیه است. در جدول ۳ چگونگی تغییر مساحت ناحیه‌هایی که بر اثر تا زدن‌های متوالی ایجاد می‌شوند، نشان داده شده است.

جدول ۳

تعداد تا زدن‌ها	میزان مساحت هر یک از ناحیه‌ها
۰	۱
۱	$\frac{1}{2}$
۲	$\frac{1}{4}$
۳	$\frac{1}{8}$
۴	؟
؟	$\frac{1}{32}$
$\vdots$	$\vdots$
۸	؟
؟	$\frac{1}{1024}$

با توجه به اعداد جدول ۳، چه الگویی را می‌توانید پیشنهاد دهید؟
در نمودار زیر، رابطه تعداد تا زدن‌ها و میزان مساحت هر یک از ناحیه‌ها نمایش داده شده است.



نقطه تقاطع منحنی با محور y ‌ها چیست؟

فعالیت

۱. تابع $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ را در نظر بگیرید و با استفاده از ماشین حساب، جدول زیر را کامل کنید.

جدول ۴

x	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	y	محاسبه y با ماشین حساب تا ۳ رقم اعشار
-۲	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-۲}$	۴	۴
$-\frac{۳}{۲}$			
-۱			
$-\frac{۱}{۲}$			
۰			
$\frac{۱}{۲}$			
۱			
$\frac{۳}{۲}$			
۲			

۲. نقاط به دست آمده در جدول بالا را روی صفحه مختصات به دست آورید و به هم وصل کنید. آیا می‌توانید به کمک نمودار،

مقدار تابع $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ را برای هر عدد دلخواه x حدس بزنید؟

۳. نمودار تابع $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ را با نمودار تابع $y = 2^x$ ، که در فعالیت‌های قبلی رسم کرده بودید، مقایسه کنید. چه تفاوت اساسی بین

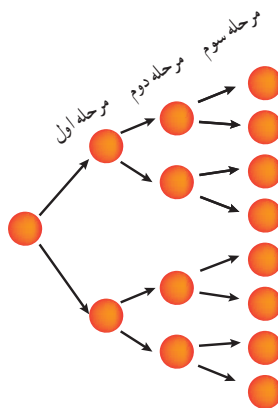
این دو نمودار ملاحظه می‌کنید؟

در تابع نمایی $y = a^x$ ، اگر $۰ < a < ۱$ باشد، وقتی x بزرگ می‌شود، مقدار y کم می‌شود و برای x ‌های کوچک‌تر از صفر، با کاهش مقدار x مقدار y به سرعت افزایش پیدا می‌کند.

تابع نمایشی $f(x) = a^x$ را در نظر بگیرید. با انتخاب عدد a ($a > 1$)، نمودار $f(x)$ را رسم کنید. نمودار $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ را در همان صفحه مختصات رسم کنید. دو نمودار حاصل را با هم مقایسه کنید.

تمرین

۱. در پژوهشکده رویان وابسته به جهاد دانشگاهی، سلول‌های بنیادی جنین انسان تولید می‌شود. این سلول‌ها قابلیت تکثیر نامحدودی دارند و می‌توانند تمام انواع سلول‌های بدن نظیر عصب و ماهیچه قلب را به وجود آورند. در شکل زیر، روند تکثیر سلول بنیادی جنین در سه مرحله نشان داده شده است.





۴. نمودار توابع $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ و $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ را در یک دستگاه (صفحه مختصات) رسم کنید و تفاوت‌ها و شباهت‌های آنها را برشمرید.

۵. نمودار توابع $y = 3^x$ و $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ را در یک دستگاه رسم کنید و سپس، آنها را با یکدیگر مقایسه کنید.

رشد و زوال نمایی

در این قسمت یکی از کاربردهای مهم توابع نمایی را بررسی می‌کنیم. ابتدا رشد نمایی را مورد توجه قرار می‌دهیم:

فعالیت

احسان هفده ساله است. پدرش قصد دارد مبلغ ده میلیون تومان برای او سرمایه‌گذاری کند. او با توجه به اینکه سال ۱۳۹۷ به فرموده رهبر معظم انقلاب اسلامی سال «حمایت از کالای ایرانی» نام‌گذاری شده است، تصمیم گرفته است که این مبلغ را در یک شرکت تولیدکننده کالای ایرانی سرمایه‌گذاری کند. این شرکت اعلام کرده است که در پاسخ به اعتماد سرمایه‌گذاران به فعالیت‌های تولیدی‌اش، در پایان هر سال، ۱۴ درصد سود علی‌الحساب به آنان پرداخت خواهد کرد.

جدول زیر را در نظر بگیرید:

جدول ۵

سن احسان	مبلغ سرمایه‌گذاری شده در شرکت تولیدی
۱۷	۱۰,۰۰۰,۰۰۰ تومان
۱۸	
۱۹	
⋮	
۲۳	

برای تکمیل جدول ۵، ابتدا مبلغ سرمایه‌گذاری شده در ۱۸ سالگی احسان (یک سال بعد از سپرده‌گذاری در شرکت) را به دست آورید.

$$10,000,000 + \left(\dots \times \frac{14}{100} \right) = \dots + 1,400,000 = 11,400,000$$

بنابراین، در جدول شماره ۵، باید در سطر دوم عدد ۱۱,۴۰۰,۰۰۰ گذاشته شود.

اکنون سطر سوم جدول را محاسبه کنید.

در واقع، باید میزان مبلغ سپرده‌گذاری شده در ۱۸ سالگی احسان را در نظر بگیریم و بر اساس سود ۱۴ درصد، مبلغ جدید سپرده‌گذاری شده را در ۱۹ سالگی او (دو سال پس از سرمایه‌گذاری اولیه) به دست آوریم:

$$11,400,000 + \dots = \dots + \dots = \dots$$

همان‌گونه که ملاحظه می‌کنید، میزان موجودی در ۱۹ سالگی احسان به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$10,000,000 \times (1/14)^2 = 12,996,000$$

با توجه به فرمول فوق، میزان موجودی را در ۲۳ سالگی احسان به دست آورید و جدول صفحه قبل را کامل کنید.

معادله کلی رشد نمایی، به صورت $f(t) = c(1+r)^t$ است که در آن $f(t)$ بیانگر مقدار نهایی، c بیانگر مقدار اولیه، r بیانگر میزان رشد (تغییرات برحسب اعشار) و t بیانگر زمان است.

بنابراین در فعالیت قبل، معادله کلی که بیانگر مبلغ سرمایه‌گذاری پس از t سال است، به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$f(t) = 10,000,000 \times (1 + 0/14)^t$$

کار در کلاس

در ابتدای سال ۱۹۹۰ میلادی، جمعیت کره زمین حدود ۵/۲ میلیارد نفر بوده است. اگر رشد جمعیت به صورت نمایی و با ضریب ثابت ۲ درصد در سال باشد، پس از ۳۰ سال جمعیت کره زمین به چند میلیارد نفر خواهد رسید؟ پس از ۳۵ سال، ۷۰ سال و ۱۰۵ سال جمعیت کره زمین چه میزان خواهد شد؟ با توجه به محاسبات بالا، آیا می‌توانید وضع جمعیت کره زمین را در هر دوره زمانی ۳۵ ساله مقایسه کنید؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

زوال نمایی

اگر مقدار تابع پس از گذشت زمان کاهش یابد، به آن مسئله زوال می‌گوییم. حال اگر تابع مورد نظر تابع نمایی باشد، می‌توان صحبت از زوال نمایی کرد.

معادله کلی زوال نمایی، به فرم $f(t) = c(1-r)^t$ است که در آن $f(t)$ بیانگر مقدار نهایی، c بیانگر مقدار اولیه، r بیانگر میزان نزول برحسب اعشار و t بیانگر زمان است.

مثال: جمعیت کشوری، در سال ۲۰۰۰ میلادی حدود چهل میلیون نفر برآورد شده است. اگر رشد جمعیت این کشور با نرخ یک درصد در حال کاهش باشد، جمعیت آن در سال ۲۰۱۸ میلادی چند نفر خواهد بود؟

حل: با جای گذاری c ، r و t در معادله کلی زوال نمایی، جمعیت این کشور در سال ۲۰۱۸ میلادی برابر است با:

$$y = 40,000,000 (1 - 0.01)^{18} = 3,338,600$$

تمرین

۱. در یکی از فعالیت های بخش اول این درس، به یک شرکت تولید کننده محصولات فرهنگی اشاره کردیم. اگر یکی از سهام داران این شرکت، در سال ۱۳۹۷ مبلغ چهل میلیون تومان در این شرکت سرمایه گذاری کند، پس از ده سال چه مبلغی به سرمایه این سهام دار اضافه خواهد شد؟

۲. جمعیت شهری یک میلیون نفر است. اگر رشد جمعیت به صورت نمایی و با ضریب ثابت ۶ درصد در سال باشد، جمعیت این شهر پس از ده سال چند نفر خواهد شد؟

۳. جزیره ای پر از موش شده بود. مسئولان تصمیم گرفتند به کمک گربه ها با موش ها مقابله کنند. در آن سال، جمعیت موش ها ۲۳۵۷۶ بود که پس از مبارزه با آنها، این تعداد با نرخ ۲/۵ درصد در سال رو به کاهش گذاشت. در همان سال، جمعیت گربه ها ۱۵۷۸۶ بود که با نرخ ۱/۸ درصد در سال رو به افزایش گذاشت.

الف) در یک جدول، جمعیت موش ها را در ۱۰ سال متوالی به دست آورید.

ب) همین کار را برای جمعیت گربه ها طی ۱۰ سال متوالی انجام دهید.

پ) آیا می توانید حدس بزنید که در چه زمانی جمعیت گربه ها بیشتر از موش ها می شود؟

ت) آیا می توانید حدس بزنید که در چه زمانی جمعیت موش ها و گربه ها با یکدیگر برابر می شود؟

ث) اگر همین روند ادامه پیدا کند، برای جمعیت گربه ها و موش ها چه اتفاقی می افتد؟

- ۱- امیری، حمیدرضا، بیژن زاده، محمد حسن، بهرامی سامانی، احسان، حیدری، رضا، داورزنی، محمود، ریحانی، ابراهیم، سید صالحی، محمد رضا و قربانی، مجتبی (۱۳۹۶). ریاضی (۱) - چاپ دوم، تهران، ایران: شرکت چاپ و نشر کتاب های درسی ایران.
- ۲- امیری، حمیدرضا، ایرانمنش، علی، فرزانه، آزادی، صدر، میر شهرام، میرزایی، حسین، محمدپور، عادل و خان زاده، فرشید (۱۳۹۶). ریاضی و آمار (۱) - چاپ دوم، تهران، ایران: شرکت چاپ و نشر کتاب های درسی ایران.
- ۳- امیری، حمیدرضا، ایرانمنش، علی، فرزانه، آزادی، محمدپور، عادل، میرزایی، حسین، و مین باشیان، هادی (۱۳۹۶). ریاضی و آمار (۲) - چاپ اول، تهران، ایران: شرکت چاپ و نشر کتاب های درسی ایران.
- ۴- ایرانمنش، علی، جمالی، محسن، ربیعی، حمیدرضا، ریحانی، ابراهیم، شاهورانی، احمد، و عالمیان، وحید (۱۳۹۴). ریاضیات (۲) - چاپ هفتم، تهران، ایران: شرکت چاپ و نشر کتاب های درسی ایران.
- ۵- بخشعلی زاده، شهرناز، پاشا، عین اله، علی و رستگار، آرش (۴۶). آمار و مدل سازی - چاپ شانزدهم، تهران، ایران: شرکت چاپ و نشر کتاب های درسی ایران.

- 6- Barnett, A., Zieglery, R., Byleen, E. & Sobacki, D.(2012) *COLLEGE ALGEBRA WITH TRIGO-NOMETRY* (9th edition). Mc Grow - Hill.
- 7- BATANERO, C. & BOROVCHNIK, M. (2016). *Statistics and probability in high school*. Springer.
- 8- Baxter, H., Handbury, M., Jeskins, J., Matthews, J. & Patmore, M.(2006). *GCSE MATHEMATICS FOR OCR*. Italy: Brain Seager.
- 9- GRAHAM, A. (2006). *Developing thinking in statistics*. Sage.
- 10- Greenwell, Raymond & Margaret. (2012). *precalculus mathematics for calculus*.
- 11- Grigorieva, E. (2017). *Methods of solving sequence and series Problems*.
- 12- *Pre- calculus Mc Graw Hill 12 Text book* (2013).
- 13- NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.
- 14- SOWEY, E. & PETOCZ, P. (2017). *A Panorama of Statistics: Perspectives, Puzzles and Paradox-es in Statistics*. John Wiley & Sons.
- 15- Stewart et al.(2016). *precalculus mathematics for calculus*.
- 16- Sullivan, M.(2011). *precalculus* (9th edition). Pearson.
- 17- Urban, P., Owen, J., Martin, D., Haese, R., Haese, S. & Bruce, M.(2004) *Mathematics for the international student (International Baccalaureate Mathematics HL Course)*. Haese & Harris.
- 18- WATSON, J. M. (2013). *Statistical literacy at school: Growth and goals*. Routledge.



سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی جهت ایفای نقش خطیر خود در اجرای سند تحول بنیادین در آموزش و پرورش و برنامه درسی ملی جمهوری اسلامی ایران، مشارکت معلمان را به‌عنوان یک سیاست اجرایی مهم دنبال می‌کند. برای تحقق این امر در اقدامی نوآورانه سامانه تعاملی بر خط اعتبارسنجی کتاب‌های درسی راه‌اندازی شد تا با دریافت نظرات معلمان درباره کتاب‌های درسی نوگاشت، کتاب‌های درسی را در اولین سال چاپ، با کمترین اشکال به دانش‌آموزان و معلمان ارجمند تقدیم نماید. در انجام مطلوب این فرایند، همکاران گروه تحلیل محتوای آموزشی و پرورشی استان‌ها، گروه‌های آموزشی و دبیرخانه راهبری دروس و مدیریت محترم پروژه آقای محسن باهو نقش سازنده‌ای را بر عهده داشتند. ضمن ارج نهادن به تلاش تمامی این همکاران، اسامی دبیران و هنرآموزانی که تلاش مضاعفی را در این زمینه داشته و با ارائه نظرات خود سازمان را در بهبود محتوای این کتاب یاری کرده‌اند به شرح زیر اعلام می‌شود.

اسامی دبیران و هنرآموزان شرکت‌کننده در اعتبارسنجی کتاب ریاضی و آمار ۳- کد ۱۱۲۲۱۲

ردیف	نام و نام خانوادگی	استان محل خدمت	ردیف	نام و نام خانوادگی	استان محل خدمت
۱	معصومه فدایی	فارس	۲۶	الهه ییمینی	کرمانشاه
۲	عاطفه رستمی	همدان	۲۷	پرشنگ امانی	کردستان
۳	جعفر صادق کوشش	شهر تهران	۲۸	پروین طالب حسامی آذر	کردستان
۴	لیلی دوستی	آذربایجان شرقی	۲۹	محمدعلی پورفتح کوهی	گیلان
۵	مرضیه نیک‌بخت	ایلام	۳۰	شهرزاد تیموری سلطانی	شهرستان‌های تهران
۶	ندا حیدر نژاد	اردبیل	۳۱	نرگس رشادتی جوبنی	البرز
۷	کرامت‌الله ایزدی	فارس	۳۲	محسن امیری بیدشکی	کرمان
۸	طاهره خلیلی	قزوین	۳۳	طاهره سهرابی	کرمانشاه
۹	عباس اسدی قلعه رشیدی	چهارمحال و بختیاری	۳۴	مهناز رضایی	خراسان شمالی
۱۰	سوسن علی مردانی	مرکزی	۳۵	فاطمه سادات شاه‌امیری	بوشهر
۱۱	لیلا حمیدی سه‌ده	البرز	۳۶	فرشاد نقی یاسوری	قزوین
۱۲	سیده رقیه حسینی	البرز	۳۷	حمیده محمدزاده	خراسان شمالی
۱۳	ملیحه سادات سادات	اصفهان	۳۸	فرزانه کدخدایی	لرستان
۱۴	سلیمه متقین	خراسان رضوی	۳۹	افشین خاصه‌خان	آذربایجان شرقی
۱۵	محمد رضا بختیاری	بوشهر	۴۰	محمد توکلی	اصفهان
۱۶	ساره ماه‌گلی	خراسان جنوبی	۴۱	جواد راشدی‌فر	خراسان جنوبی
۱۷	مهناز صبوری	شهر تهران	۴۲	علی فرشتیان	شهرستان‌های تهران
۱۸	عاطفه حسین‌پور	مازندران	۴۳	سپیده سینا	خوزستان
۱۹	رضا رحیمی	اردبیل	۴۴	سکینه حبیبی	لرستان
۲۰	سید ابوالفضل فاضلیان	همدان	۴۵	مهدی میرحاج	سمنان
۲۱	مریم زینالی	خوزستان	۴۶	لیلا کولائی‌زاده	ارومیه، ناحیه ۲
۲۲	اکرم سلامی	آذربایجان شرقی	۴۷	زهره صفایی	سمنان
۲۳	علی‌رضا اجارستانی	مازندران	۴۸	حبیب خالدی‌فرد	خوزستان
۲۴	مریم مجیدی‌فر	زنجان	۴۹	جمال برجی	ایلام
۲۵	ایوب خلیلیان گل سفیدی	چهارمحال و بختیاری	۵۰	جمال نوین	یزد